

Bachelier ingénieur civil

Mathématiques appliquées - MATH-0504

Examen

21 Août 2021

Seules les réponses rédigées sur les pages numérotées seront prises en considération. Il est interdit de dégrader les feuilles.

Remarques :

- Lisez attentivement les énoncés. Plus d'un élément peut être demandé dans une sous-question.
 - Essayez **toutes les sous-questions**, beaucoup sont indépendantes.
 - **Justifiez** vos développements et **expliquez** vos démarches.
 - Les calculatrices, smartphones et montres connectées sont interdites.
-

E1 : Séparation de variables (10 Points)

Considérer l'équation d'Euler-Bernoulli

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0 \quad (\diamond)$$

où a est une constante strictement positive.

- (a) (20 %) Classifier l'équation (\diamond) en justifiant brièvement. En particulier, est-elle homogène ? linéaire ? Quel est l'ordre de cette équation ?
- (b) (30 %) En utilisant la séparation de variable $u(x, t) = w(t)v(x)$, trouver toutes les solutions séparables de l'équation (\diamond).
- Remarque :* Ne pas étudier les solutions exponentiellement croissantes ou décroissantes dans le temps.
- (c) (40 %) Considérer maintenant le domaine $(x, t) \in [0, l] \times [0, \infty[$ et les conditions de bord

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(l, t) = u_{xx}(l, t) = 0.$$

Montrer, en justifiant votre démarche, que la solution générale de l'équation (\diamond) sur ce domaine avec ces conditions de bord peut s'écrire sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x).$$

Donner l'expression de ω_n et k_n en fonction de n , a et l .

Indice : Imposer d'abord les conditions de bord en $x = 0$, puis celles en $x = l$.

- (d) (10 %) La vitesse du n -ième mode est définie par $c_n \triangleq \frac{\omega_n}{k_n}$. Donner l'expression de ces vitesses. Les modes se déplacent-ils à la même vitesse ?
-

Solution :

- (a) L'opérateur différentiel associé à cette équation est $\mathcal{L} \triangleq \partial_{tt} + a^4 \partial_{xxxx}$. L'équation est donc
- homogène ($\mathcal{L}(u) = 0$),
 - linéaire ($\mathcal{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{L}(u) + \beta \mathcal{L}(v)$),
 - du quatrième ordre spatial (∂_{xxxx}) et du second ordre temporel (∂_{tt})
- (b) En utilisant la décomposition $u = wv$, l'équation s'écrit

$$w''v + a^2 wv^{(4)} = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{w''}{w} + a^2 \frac{v^{(4)}}{v} = 0. \quad (2)$$

Le premier terme ne dépend que du temps t alors que le deuxième terme ne dépend que de la variable spatiale x . Chacun de ces deux termes doit donc être égal à la même constante λ , *i.e*

$$w'' + \lambda w = 0 \quad \text{and} \quad a^2 v^{(4)} - \lambda v = 0. \quad (3)$$

Dépendance temporelle En fonction du signe de λ , trois types de solutions apparaissent, *i.e*

$$\text{si } \lambda = \omega^2 > 0 \quad \Rightarrow w = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad (4)$$

$$\text{si } \lambda = -\omega^2 < 0 \quad \Rightarrow w = C \cosh(\omega t) + D \sinh(\omega t), \quad (5)$$

$$\text{si } \lambda = 0 \quad \Rightarrow w = Et + F. \quad (6)$$

Les solutions évanescentes correspondent au cas $\lambda = -\omega^2$. Ce cas n'est plus considéré dans la suite de l'exercice.

Dépendance spatiale Deux types de solutions apparaissent. Si $\lambda = 0$ alors la partie spatiale est simplement un polynôme d'ordre 3, *i.e*.

$$v(x) = Gx^3 + Hx^2 + Ix + J \quad \text{si } \lambda = 0.$$

Lorsque $\lambda = \omega^2$, les quatre racines du polynôme caractéristiques sont $\pm \sqrt{\omega/a}$ et $\pm i \sqrt{\omega/a}$. En définissant $k \triangleq \sqrt{\omega/a}$, la partie spatiale s'écrit

$$\begin{aligned} v(x) &= K' \exp(ikx) + L' \exp(-ikx) + M' \exp(kx) + N' \exp(-kx) \\ &= K \cos(kx) + L \sin(kx) + M \cosh(kx) + N \sinh(-kx) \quad \text{si } \lambda = \omega^2 > 0. \end{aligned}$$

Les conditions de bord donnent des conditions à appliquer sur la partie spatiale, *i.e*.

$$\begin{cases} u(0, t) = w(t)v(0) = 0, \forall t \Rightarrow v(0) = 0, \\ u(l, t) = w(t)v(l) = 0, \forall t \Rightarrow v(l) = 0, \\ u_{xx}(0, t) = w(t)v_{xx}(0) = 0, \forall t \Rightarrow v_{xx}(0) = 0, \\ u_{xx}(l, t) = w(t)v_{xx}(l) = 0, \forall t \Rightarrow v_{xx}(l) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

De manière assez rapide lorsque $\lambda = 0$, on obtient $G = H = I = J = 0$. Lorsque $\lambda > 0$, la dérivée seconde de la partie spatiale est donnée par

$$v_{xx}(x) = -Kk^2 \cos kx - Lk^2 \sin kx + Mk^2 \cosh kx + Nk^2 \sinh kx \quad (8)$$

Les conditions de bord en $x = 0$ donnent donc

$$\begin{cases} v(0) &= K + 0 + M + 0 = 0, \\ v_{xx}(0) &= -Kk^2 + 0 + Mk^2 + 0 = 0. \end{cases} \Rightarrow K = M = 0. \quad (9)$$

Alors que les conditions en $x = l$ donnent

$$\begin{cases} v(l) &= L \sin kl + N \sinh kl = 0, \\ v_{xx}(l) &= -Lk^2 \sin kl + Nk^2 \sinh kl = 0 \end{cases} \Rightarrow N = 0 \text{ et } L \sin kl = 0. \quad (10)$$

Les seules solutions non nulles sont donc obtenues lorsque

$$\sin(kl) = 0 \Rightarrow kl = n\pi, \text{ avec } n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Les fonctions propres spatiales sont donc

$$v_n(x) = L_n \sin(k_n x) = L_n \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right), \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Les pulsation temporelles correspondantes sont données par

$$\omega_n = k_n^2 a = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a \quad (13)$$

et les fonctions propres temporelles sont donc

$$w_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) = A_n \cos\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 at\right) + B_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 at\right). \quad (14)$$

Par linéarité, la solution la plus générale est donc

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] L_n \sin(k_n x) \quad (15)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [A'_n \cos(\omega_n t) + B'_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x). \quad (16)$$

avec $\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a$ et $k_n = \frac{n\pi}{l}$.

(c) La vitesse du n -ième mode est donc donnée par

$$c_n \triangleq \frac{\omega_n}{k_n} = \frac{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a}{\frac{n\pi}{l}} \quad (17)$$

$$= n\pi \frac{a}{l} \quad (18)$$

Les modes ne se déplacent pas tous à la même vitesse. La vitesse de phase des modes augmente avec n .

E2 : Factorisation (10 Points)

Considérer l'équation

$$u_{tt} + (c_1 - c_2)u_{xt} - c_1c_2u_{xx} = 0 \quad (\diamond)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes strictement positives.

- (a) (20 %) Classifier l'équation (\diamond) en justifiant brièvement. En particulier, est-elle homogène ? linéaire ? parabolique ? elliptique ? hyperbolique ? Quel est l'ordre de cette équation ?
- (b) (25 %) Montrer que $e \triangleq \frac{1}{2}(u_t^2 + c_1c_2u_x^2)$ est une densité conservée et donner le flux associé.
- (c) (40 %) Considérer maintenant le domaine $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[$. Résoudre l'équation (\diamond) avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{et} \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Indice : Factoriser en deux équations du premier degré.

- (d) (15 %) En utilisant la solution de la sous question précédente, résoudre le problème

$$-s_1s_2u_{tt} + (s_1 - s_2)u_{xt} + u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[$$

avec

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{et} \quad u_t(x, 0) = 0$$

où s_1 et s_2 sont des constantes strictement positives.

Indice : Les constantes c_1 et c_2 sont des vitesses. Les constantes s_1 et s_2 sont des lenteurs. L'inverse d'une lenteur est une vitesse. L'inverse d'une vitesse est une lenteur.

Solution :

- (a) L'opérateur différentiel associé à cette équation est $\mathcal{L} \triangleq \partial_{tt} + (c_1 - c_2)\partial_{xt} - c_1c_2\partial_{xx}$. L'équation est donc
- homogène ($\mathcal{L}(u) = 0$),
 - linéaire ($\mathcal{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha\mathcal{L}(u) + \beta\mathcal{L}(v)$),
 - du second ordre spatial (∂_{xx}) et temporel (∂_{tt}),
 - hyperbolique.

En effet, elle peut s'écrire

$$Au_{tt} + B u_{tx} + C u_{xx} + Du_t + Eu_x + Fu = G \quad (19)$$

$$1u_{tt} + (c_1 - c_2)u_{tx} - c_1c_2u_{xx} + 0 u_t + 0 u_x + 0 u = 0 \quad (20)$$

en conséquence

$$B^2 - 4AC = (c_1 - c_2)^2 + 4c_1c_2 = (c_1 + c_2)^2 > 0. \quad (21)$$

- (b) La dérivée de la quantité conservée proposée est donnée par

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + c_1c_2u_x^2) \quad (22)$$

$$= u_t u_{tt} + c_1c_2u_x u_{xt} \quad (23)$$

$$= u_t (u_{tt} + (c_1 - c_2)u_{xt} - c_1c_2u_{xx}) + c_1c_2u_t u_{xx} - (c_1 - c_2)u_t u_{xt} + c_1c_2u_x u_{xt} \quad (24)$$

$$= c_1c_2(u_t u_{xx} + u_x u_{xt}) - (c_1 - c_2)u_t u_{xt} \quad (25)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(c_1c_2u_x u_t - (c_1 - c_2) \frac{1}{2} u_t^2 \right). \quad (26)$$

Le flux associé est donc

$$f = -c_1 c_2 u_x u_t + (c_1 - c_2) \frac{1}{2} u_t^2. \quad (27)$$

(c) La factorisation de l'opérateur différentiel donne

$$(\partial_t + c_1 \partial_x) (\partial_t - c_2 \partial_x) u = 0. \quad (28)$$

En posant $v(x, t) = (\partial_t - c_2 \partial_x) u$, le problème peut s'écrire comme un système du premier ordre

$$\begin{cases} (\partial_t + c_1 \partial_x) v = 0, & (29) \\ (\partial_t - c_2 \partial_x) u = v, & (30) \\ u(x, 0) = \phi(x), & (31) \\ u_t(x, 0) = 0. & (32) \end{cases}$$

À partir de l'Eq.(29), on peut montrer que v est constante sur les lignes caractéristiques d'équations $x - c_1 t = C$. Soit

$$v(x, t) = f(x - c_1 t). \quad (33)$$

Grâce à ce résultat, l'Eq.(30) peut s'écrire

$$(\partial_t - c_2 \partial_x) u = f(x - c_1 t). \quad (34)$$

Une solution particulière de cette équation est donnée par $u^p(x, t) = h(x - c_1 t)$, avec $h'(y) = -\frac{1}{c_1 + c_2} f(y)$.

D'autre part, en utilisant le même raisonnement que pour v , il est possible de montrer que la solution homogène est donnée par $u^h(x, t) = g(x + c_2 t)$.

Par linéarité, la solution finale est la somme de ces solutions, soit

$$u(x, t) = h(x - c_1 t) + g(x + c_2 t). \quad (35)$$

En utilisant ensuite les conditions initiales Eq.(31) et Eq.(32), on obtient

$$\begin{cases} h(x) + g(x) = \phi(x), & (36) \\ -c_1 h'(x) + c_2 g'(x) = 0. & (37) \end{cases}$$

En dérivant par rapport à x , la première équation, on obtient successivement

$$\begin{cases} h'(x) + g'(x) = \phi'(x), \\ -c_1 h'(x) + c_2 g'(x) = 0. \end{cases} \quad (38)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (c_1 + c_2) g'(x) = c_1 \phi'(x), \\ -(c_1 + c_2) h'(x) = -c_2 \phi'(x). \end{cases} \quad (39)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g'(x) = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \phi'(x), \\ h'(x) = \frac{c_2}{c_1 + c_2} \phi'(x). \end{cases} \quad (40)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x) = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \phi(x) + A, \\ h(x) = \frac{c_2}{c_1 + c_2} \phi(x) + B. \end{cases} \quad (41)$$

où A et B sont des constantes d'intégrations. En réutilisant la première ligne du système Eqs.(36), on montre que $A + B = 0$. Finalement la solution est donc

$$u(x, t) = \frac{1}{c_1 + c_2} [c_2\phi(x - c_1t) + c_1\phi(x + c_2t)]. \quad (42)$$

(d) En remplaçant les lenteurs par l'inverse des vitesses, *i.e.* $s_1 \rightarrow 1/c_1$ et $s_2 \rightarrow 1/c_2$, cette nouvelle équation devient

$$u_{xx} + (s_1 - s_2)u_{xt} - s_1s_2u_{tt} = u_{xx} + \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)u_{xt} - \frac{1}{c_1c_2}u_{tt} \quad (43)$$

$$= u_{xx} + \frac{c_2 - c_1}{c_1c_2}u_{xt} - \frac{1}{c_1c_2}u_{tt} \quad (44)$$

$$= -\frac{1}{c_1c_2}(-c_1c_2u_{xx} + (c_1 - c_2)u_{xt} + u_{tt}) \quad (45)$$

$$= -\frac{1}{c_1c_2}(u_{tt} + (c_1 - c_2)u_{xt} - c_1c_2u_{xx}). \quad (46)$$

Les deux problèmes sont donc équivalents lorsque les lenteurs et les vitesses se correspondent, *i.e.*

$$u_{xx} + (s_1 - s_2)u_{xt} - s_1s_2u_{tt} = 0 \Leftrightarrow u_{tt} + (c_1 - c_2)u_{xt} - c_1c_2u_{xx} = 0. \quad (47)$$

La solution du nouveau problème est donc simplement obtenue en remplaçant les vitesses par les lenteurs dans la solution de la sous question précédente. Soit

$$u(x, t) = \frac{1}{c_1 + c_2} [c_2\phi(x - c_1t) + c_1\phi(x + c_2t)] \quad (48)$$

$$= \frac{s_1s_2}{s_1 + s_2} \left[\frac{1}{s_2}\phi\left(x - \frac{t}{s_1}\right) + \frac{1}{s_1}\phi\left(x + \frac{t}{s_2}\right) \right] \quad (49)$$

$$= \frac{1}{s_1 + s_2} \left[s_1\phi\left(x - \frac{t}{s_1}\right) + s_2\phi\left(x + \frac{t}{s_2}\right) \right]. \quad (50)$$

E3 : Caractéristiques (10 Points)

On considère les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & 2u_t + (4x + 3)u_x = 0, \\ \text{(b)} \quad & 2u_t + (4x + 3u)u_x = 0, \end{aligned}$$

définies pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et assorties chacune de la condition initiale $u(x, 0) = 4x + 2$.

Pour les cas (a) (40%) et (b) (60%),

- classifier l'équation (linéarité, homogénéité, ordre),
- déterminer la solution et l'équation des lignes caractéristiques,
- esquisser les lignes caractéristiques pour $x(0) = -1, 0, 1$.

Solution

(a) L'équation à résoudre devient

$$u_t + \frac{(4x + 3)}{2} u_x = 0. \quad (51)$$

EDP linéaire homogène d'ordre 1.

A partir de la définition de la dérivée totale

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (52)$$

l'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente comme l'équation différentielle ordinaire ci-dessous

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = 0, \quad (53)$$

en considérant les dérivées partielles u_t et u_x définies sur les lignes $x(t)$. Dès lors, la solution est constante le long de ces lignes et en définissant C_1 comme une constante telle que $C_1 \in \mathbb{R}$, on a

$$u(x(t), t) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \quad (54)$$

Par conséquent, les lignes caractéristiques sont données par la seconde équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4x + 3}{2}, \quad (55)$$

$$\Rightarrow x(t) = K \exp(2t) - \frac{3}{4}, \quad K \in \mathbb{R}. \quad (56)$$

En utilisant les conditions initiales, on détermine la première constante

$$u(x(t), t) = C_1 = u(x(0), 0) = \phi(x_0). \quad (57)$$

La deuxième constante est déterminée par l'équation de la ligne caractéristique en $t = 0$,

$$x(0) = x_0 = K - \frac{3}{4}, \quad (58)$$

et la constante K

$$K = x_0 + \frac{3}{4}. \quad (59)$$

Les lignes caractéristiques deviennent

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{3}{4}\right) \exp(2t) - \frac{3}{4}. \quad (60)$$

Finalement, la solution est

$$u(x, t) = \phi(x_0) = 4x_0 + 2, \quad (61)$$

$$= (4x + 3) \exp(-2t) - 1. \quad (62)$$

Pour dessiner les lignes caractéristiques, l'Eq.(60) peut être utilisée pour différents x_0 .

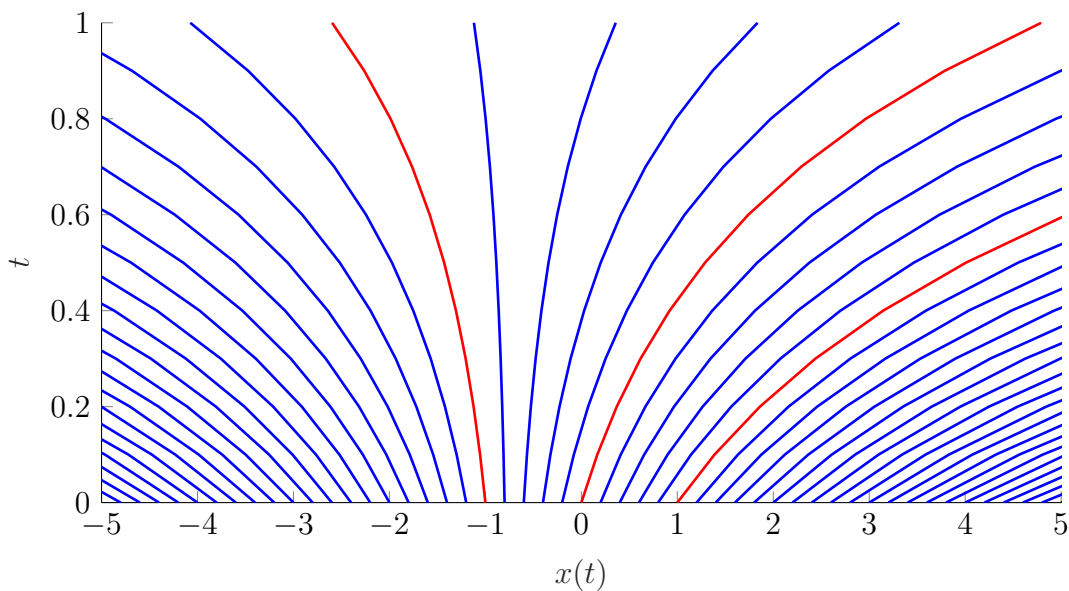


FIGURE 1 – Les caractéristiques demandées sont dessinées en rouge et les autres en bleu.

(b) L'équation à résoudre devient

$$u_t + (x + u) u_x = 0. \quad (63)$$

EDP non-linéaire et non-homogène d'ordre 1.

A partir de la définition de la dérivée totale

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (64)$$

l'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente comme l'équation différentielle ordinaire ci-dessous

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = 0, \quad (65)$$

en considérant les dérivées partielles u_t et u_x définies sur les lignes $x(t)$. Dès lors, la solution est constante le long de ces lignes et en définissant C_1 comme une constante telle que $C_1 \in \mathbb{R}$, on a

$$u(x(t), t) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \quad (66)$$

Par conséquent, les lignes caractéristiques sont données par la seconde équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4x + 3u(x(t), t)}{2}, \quad (67)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{4x + 3C_1}{2}, \quad (68)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} + 2x = \frac{3C_1}{2}, \quad (69)$$

$$\Rightarrow x(t) = K \exp(2t) + \frac{3}{4} C_1, \quad K \in \mathbb{R}. \quad (70)$$

En utilisant les conditions initiales, on détermine la première constante

$$u(x(t), t) = C_1 = u(x(0), 0) = \phi(x_0) = 4x_0 + 2. \quad (71)$$

L'équation de la ligne caractéristique devient

$$x(t) = K \exp(2t) - 3x_0 - \frac{3}{2}. \quad (72)$$

La deuxième constante est déterminée par l'équation de la ligne caractéristique en $t = 0$,

$$x(0) = x_0 = K - 3x_0 - \frac{3}{2}, \quad (73)$$

$$\Rightarrow K = 4x_0 + \frac{3}{2}. \quad (74)$$

les lignes caractéristiques deviennent

$$x(t) = \left(4x_0 + \frac{3}{2}\right) \exp(2t) - 3x_0 - \frac{3}{2}, \quad (75)$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{x - \frac{3}{2} (\exp(2t) - 1)}{4 \exp(2t) - 3}. \quad (76)$$

Finalement, la solution est

$$u(x, t) = 2 \frac{2x + \exp(2t)}{4 \exp(2t) - 3}. \quad (77)$$

Pour dessiner les lignes caractéristiques, l'Eq.(75) peut être utilisée pour différents x_0 .

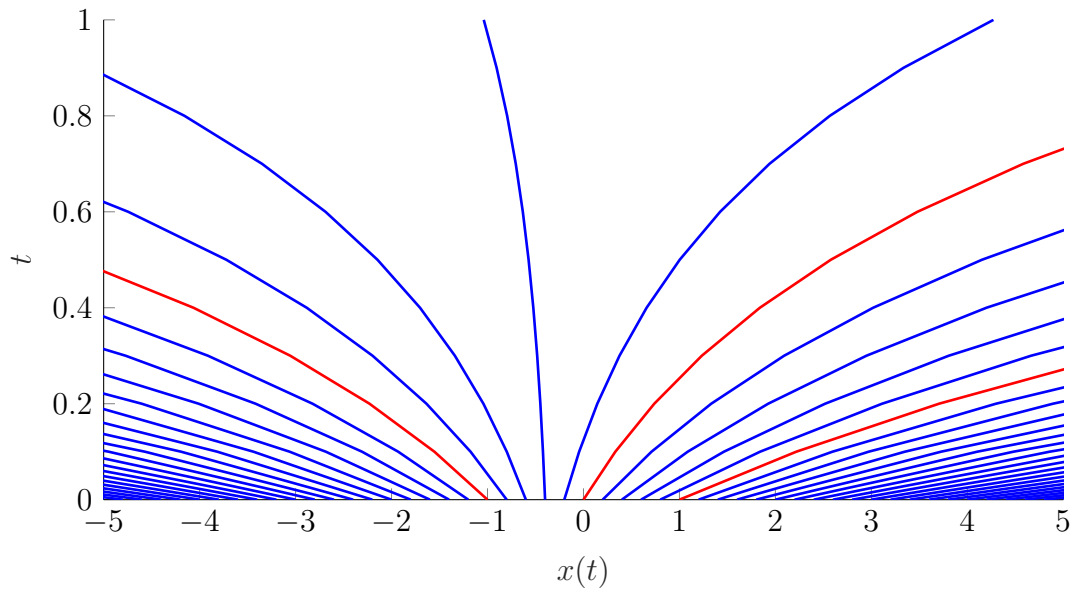


FIGURE 2 – Les caractéristiques demandées sont dessinées en rouge et les autres en bleu.