Janvier 2019 - Examen de théorie

Nom :	Prénom :	Matricule :

*N'oubliez pas d'indiquer vos nom et prénom. Veuillez vérifier dès le début de l'examen que vous disposez de l'**entièreté du questionnaire**, qui compte 10 pages numérotées de 1 à 10, parmi lesquelles trois sont vierges et peuvent vous servir de feuilles de brouillon. Ces trois feuilles ne seront **pas** regardées lors de la correction.*

*On vous demande de fournir des réponses très **concises et spécifiques**. Il ne s'agit pas d'être verbeux, mais de prouver, par des réponses courtes qui vont droit au but, que vous avez atteint un niveau élevé de compréhension de la matière. Des réponses qui contiennent des informations périphériques par rapport à ce qui est demandé seront moins bien évaluées que des réponses en parfaite adéquation avec l'objet de la question.*

*Seules les réponses rédigées **à l'intérieur des cadres** prévus à cet effet seront prises en considération.*

Il est interdit de dégrafer les feuilles.

Question 1

Enoncer les conditions à remplir pour qu'un problème impliquant une équation aux dérivées partielles (EDP) soit *bien posé*.

Soit l'EDP du 1^{er} ordre suivante, avec comme variables indépendantes x et y :

$$u_x + y\ u_y = 0.$$

Etablir la forme générale de la solution.

De quelle condition(s) supplémentaire(s) faut-il disposer pour obtenir un problème bien posé dans le domaine $x \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$?

Question 2

On rappelle ci-dessous la liste des cinq invariants de l'équation de diffusion $u_t = k\ u_{xx}$.

	Invariants de l'équation de diffusion
Invariant ①	La translation $u(x - y,\ t)$ d'une solution $u(x,\ t)$ est également solution.
Invariant ②	Une dérivée de la solution est également une solution.
Invariant ③	Une combinaison linéaire de plusieurs solutions reste une solution.
Invariant ④	Si $S(x,\ t)$ est une solution, alors l'intégrale $$v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)g(y)\,dy$$ est également une solution quelle que soit la fonction $g(y)$, pour autant que l'intégrale converge.
Invariant ⑤	Si $u(x,\ t)$ est une solution, alors la fonction *dilatée* $u(a^{1/2}\ x,\ a\ t)$ est également une solution, quel que soit le paramètre $a > 0$.

Parmi ces invariants, on demande lesquels s'appliquent uniquement à l'*équation* de diffusion et lesquels s'appliquent également au *problème* de diffusion (équation munie d'une condition initiale générale) ? Justifier brièvement.

Indiquer le(s)quel(s) de ces invariants s'appliquent aussi à l'équation des ondes. Justifier brièvement.

On rappelle ci-après les principales étapes de la démonstration de la solution de l'équation de diffusion.

On vous demande d'expliciter quel(s) invariant(s) est (sont) indispensable(s) à quelle(s) étape(s) de la démonstration. Justifier clairement l'utilisation de chaque invariant, sans pour autant restituer l'entièreté de la démonstration.

	Principales étapes de la démonstration
Etape 1	On cherche une solution de la forme $$Q(x,t) = g(p) \quad \text{where } p = \frac{x}{\sqrt{4kt}}$$ pour l'équation de diffusion munie d'une condition initiale particulière (fonction de Heaviside).
Etape 2	On transforme l'EDP de départ en une EDO qu'on résout.
Etape 3	On fixe les constantes d'intégration sur base d'une condition initiale particulière (fonction de Heaviside).
Etape 4	On exprime la solution générale sous la forme : $$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi(y)\,dy$$ avec $S = \partial Q/\partial x$.

Question 3

L'approximation par différences finies centrées de l'équation d'ondes unidimensionnelle $u_{tt} = c^2\, u_{xx}$ mène au schéma numérique suivant :

$$u_j^{n+1} = s\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) + 2\left(1 - s\right)u_j^n - u_j^{n-1}$$

avec $u_j^n \approx u\left(j\Delta x, n\Delta t\right)$ et $s = c^2\left(\Delta t/\Delta x\right)^2$. Montrer grâce à une analyse de Von Neumann que ce schéma est stable pour $s \leq 1$.

Suggestion : lorsque $p < -2$, l'expression

$$1 + p - \sqrt{p^2 + 2p}$$

prend des valeurs inférieures à -1.

Question 4

Soit la relation $b = A\ x$, avec A une matrice quelconque, et b et x des vecteurs. Montrer que la SVD permet de diagonaliser toute matrice A pour autant qu'on exprime b et x dans la base des vecteurs singuliers de A, respectivement à gauche et à droite.