CALCUL DES PREDICATS

Langage formel plus riche que le calcul des propositions, qui permet d'exprimer des propriétés vraies pour certains individus pris dans un ensemble (relations).
En mathématique, on définit une *relation* $\mathcal{R}$ d'arité n sur les ensembles $D_1, D_2, \ldots, D_n$, comme un sous-ensemble du produit cartésien $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$.

Exemples :

$$\begin{aligned}\mathcal{PPQ}(x,y) &= \{(x,y) \in (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \mid x < y\} \\ &= \{(0,1),(0,2),(0,3),\ldots, \\ &\quad\ (1,2),(1,3),(1,4),\ldots, \\ &\quad\ (2,3),(2,4),(2,5),\ldots, \\ &\quad\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \}\end{aligned}$$

$\mathcal{CARRE}(x,y) = \{(x,y) \in (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \mid y = x^2\} = \{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9),\ldots\}$

$\mathcal{PR}(x) = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ est un nombre premier}\} = \{2,3,5,7,11,13,\ldots\}$

Soit D un ensemble. $\mathcal{R}$ est une *relation* d'arité n *sur le domaine* D si $\mathcal{R}$ est une relation sur D^n.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'arité n sur D.
Le *prédicat* R associé à $\mathcal{R}$ est défini par

$$R(d_1,\ldots,d_n) = T \quad \text{ssi} \quad (d_1,\ldots,d_n) \in \mathcal{R}.$$

Exemples.
Prédicats correspondant aux relations précédentes.

$PPQ(0,1) = T \quad PPQ(8,4) = F \quad PPQ(3,6) = T \quad \cdots$
$CARRE(0,0) = T \quad CARRE(0,2) = F \quad CARRE(2,4) = T \quad CARRE(2,7) = F \quad \cdots$
$PR(3) = T \quad PR(8) = F \quad \cdots$

Proposition = propriété vraie ou fausse

Prédicat = propriété vraie pour certains individus d'un domaine

Logique des prédicats : l'essentiel

- quantification
- interprétation : domaine
  - + association prédicat $\leftrightarrow$ relation sur le domaine
  - + association symbole fonctionnel $\leftrightarrow$ fonction sur le domaine

Pas de procédure de décision pour le calcul des prédicats (validité indécidable) !

Seulement "semi-procédure de décision" (validité semi-décidable) :

- Tableaux sémantiques (Hintikka)
- Séquents (Gentzen)
- Systèmes axiomatiques (Hilbert)
- Modèles canoniques (Herbrand)
- Résolution (Robinson)

SYNTAXE DU CALCUL DES PREDICATS
(SIMPLIFIE = sans symboles fonctionnels)

Soit

- $\mathcal{P} = \{p, q, r, \ldots\}$: un ensemble de symboles arbitraires appelés *symboles de prédicats* (chacun ayant une arité).

  NB : Les propositions atomiques sont des symboles de prédicats d'arité 0.
- $\mathcal{A} = \{a, a_1, a_2, \ldots, b, c, \ldots\}$: un ensemble de symboles arbitraires appelés *constantes* (ou *constantes individuelles*).
- $\mathcal{X} = \{x, x_1, x_2, x', \ldots, y, z, , \ldots\}$: un ensemble de symboles arbitraires appelés *variables* (ou *variables individuelles*).

Pour définir la notion de *formule* du calcul des prédicats, on va d'abord définir les notions de *terme* et de *formule atomique*.

Termes et formules

Un *terme* est une constante $a \in \mathcal{A}$ ou une variable $x \in \mathcal{X}$.

Une *formule atomique* est une expression $p(t_1, \ldots, t_n)$, où $p \in \mathcal{P}$ est un symbole prédicatif d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des *termes*.

Le concept de *formule* est défini récursivement comme suit.

- Une *formule atomique* est une formule.
- *true*, *false* sont des formules.
- Si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule.
- Si A_1 et A_2 sont des formules, alors $(A_1 \vee A_2)$, $(A_1 \wedge A_2)$, $(A_1 \Rightarrow A_2)$ et $(A_1 \equiv A_2)$ sont des formules.
- Si A est une formule et x une variable, alors $\forall x A$ et $\exists x A$ sont des formules.

Rien d'autre n'est une formule.

Quantification, portée, variable liée, variable libre

- La *portée* d'une quantification (d'un quantificateur) est la formule à laquelle la quantification s'applique.
  Dans $\forall x A$ ou dans $\exists x A$,
  la portée de x est A.

  Semblable à la portée des déclarations dans un langage de programmation (Pascal).
- L'occurrence de la variable x dans la quantification $\forall x$ ou $\exists x$ est dit *quantifiée*.
- Toute occurrence de x dans la portée d'une quantification est dite *liée*.
- Une variable est *libre* si elle n'est ni quantifiée, ni liée.
- Les portées de deux variables x et y sont
  disjointes ou l'une est incluse dans l'autre.

Parenthèses, précédence

On aurait pu introduire la syntaxe avec des parenthèses autour de toutes les formules composées : $(\neg A), (\forall x A), (\exists x A)$.

Dans ce cas, on peut justifier l'omission de certaines parenthèses par des règles de précédence.

Précédence des connecteurs logiques :

(ordre décroissant) $\left\{\begin{matrix} \neg \\ \forall \\ \exists \end{matrix}\right\}$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\equiv$

Exemple :

$\Big(\forall x \Big((\neg(\exists y p(x,y))) \vee (\neg(\exists y p(y,x))) \Big)\Big)$

peut s'écrire

$\forall x \Big(\neg \exists y p(x,y) \vee \neg \exists y p(y,x) \Big)$

Variables libres et liées, exemples

1. $\varphi_1 =_{def} \forall x \big(p(x,a) \Rightarrow \exists x\, q(x)\big)$
   Deux quantifications sur x sont imbriquées.
   On préférera éviter ce genre de formule,
   mais on verra que la sémantique de φ_1 est
   celle de $\forall x \big(p(x,a) \Rightarrow \exists y\, q(y)\big)$ ou encore de $\forall y \big(p(y,a) \Rightarrow \exists x\, q(x)\big)$.
2. $\varphi_2 =_{def} \exists x \forall x A$
   Deux quantifications sur x sont imbriquées.
   Comme précédemment, la sémantique de φ_2
   est celle de $\exists y \forall x A$, par exemple, si y n'a pas d'occurrence (libre) dans A ; la quantification sur y est inutile, et la formule équivaut à $\forall x A$.
3. $\varphi_3 =_{def} \forall x\, p(x,a) \Rightarrow \exists x\, q(x)$
   Deux variables liées ont le même nom.
   Mais les portées sont disjointes,
   donc pas de problème.
4. $\varphi_4 =_{def} \forall x\, p(x,a) \Rightarrow q(x)$
   Une variable libre et une variable liée
   ont le même nom x.
   C'est acceptable, mais il est préférable de *renommer* la variable liée. Par exemple, $\forall y\, p(y,a) \Rightarrow q(x)$.

Fermetures universelle et existentielle

Une formule est *fermée* ou *close* si elle ne contient aucune variable libre.

Lorsqu'une formule A contient les variables libres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on la notera aussi $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont toutes les variables libres d'une formule A,

- $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A$
  est la *fermeture universelle* de A.
  Parfois aussi dénotée par $\forall * A$.
- $\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n A$
  est la *fermeture existentielle* de A.
  Parfois aussi dénotée par $\exists * A$.

La fermeture universelle de $p(x) \Rightarrow q(x)$
est $\forall x\, (p(x) \Rightarrow q(x))$ et non $\forall x\, p(x) \Rightarrow q(x)$.

Exemples de formules

1. $\forall x \forall y \big(p(x,y) \Rightarrow p(y,x)\big)$
   La formule sera vraie dans les interprétations qui associent à p une relation symétrique.
2. $\forall x \exists y\, p(x,y)$
3. $\exists y \forall x\, p(x,y)$
4. $\forall x p(a,x)$
5. $\exists x \exists y \big(p(x) \wedge \neg p(y)\big)$
   La formule ne pourra être vraie que dans des interprétations dont le domaine contient au moins deux éléments.
6. $\forall x \big(p(x) \wedge q(x)\big) \equiv \big(\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)\big)$
   On verra que la formule est valide.
7. $\exists x \big(p(x) \vee q(x)\big) \equiv \big(\exists x p(x) \vee \exists x q(x)\big)$
   On verra que la formule est valide.
8. $\forall x \big(p(x) \Rightarrow q(x)\big) \Rightarrow \big(\forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x)\big)$
   On verra que la formule est valide.
9. $\big(\forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x)\big) \Rightarrow \forall x \big(p(x) \Rightarrow q(x)\big)$
   Conditionnel inverse du précédent – non valide.

CALCUL DES PREDICATS SIMPLIFIE
LA SEMANTIQUE

Une formule du calcul des prédicats va recevoir une *valeur de vérité*. Or ses composantes sont soit des sous-formules qui auront aussi une *valeur de vérité*, soit des *termes* qui désignent des *objets*.

Une *interprétation* $\mathcal{I}$ est un triplet (D, I_c, I_v) tel que :

- D est un ensemble non vide, appelé *domaine d'interprétation* ;
- I_c est une fonction qui associe
  - à toute *constante* a,
    un objet $I_c[a]$ appartenant à D,
  - à tout symbole prédicatif p (arité n), une relation (arité n) sur D,
    càd une fonction de D^n dans $\{T, F\}$;
- I_v est une fonction qui associe à toute variable x un élément $I_v[x]$ de D.

Exemples d'interprétations

Soit la formule $\forall x\, p(a,x)$;

Quatre exemples d'interprétations :

- $\mathcal{I}_1 = (\mathbf{N}, \quad I_{1c}[p] = \leq, \quad I_{1c}[a] = 0)$
- $\mathcal{I}_2 = (\mathbf{N}, \quad I_{2c}[p] = \leq, \quad I_{2c}[a] = 1)$
- $\mathcal{I}_3 = (\mathbf{Z}, \quad I_{3c}[p] = \leq, \quad I_{3c}[a] = 0)$
- $\mathcal{I}_4 = (\mathcal{S}, \quad I_{4c}[p] = \sqsubseteq, \quad I_{4c}[a] = \text{`'})$

Règles d'interprétation I

Une interprétation $\mathcal{I} = (D, I_c, I_v)$ associe une valeur de vérité à toute formule A et associe un élément de D à tout terme t.

Interprétation des termes :
- Si x est une variable libre, $\mathcal{I}[x] = I_v[x]$.
- Si a est une constante, $\mathcal{I}[a] = I_c[a]$.

Interprétation des formules :
- Si p est un symbole prédicatif d'arité n et si $t_1, \dots, t_n$ sont des *termes*, alors $\mathcal{I}[p(t_1, \dots, t_n)] = (I_c[p])(\mathcal{I}[t_1], \dots, \mathcal{I}[t_n])$.
- $\mathcal{I}[\mathit{true}] = T$ et $\mathcal{I}[\mathit{false}] = F$.
- Si A est une formule, alors $\neg A$ s'interprète comme dans le calcul des propositions, c'est-à-dire
  $\mathcal{I}[\neg A] \;= T$ si $\mathcal{I}[A] = F$,
  $\qquad\quad = F$ si $\mathcal{I}[A] = T$.

Règles d'interprétation II

- Si A_1 et A_2 sont des formules, alors $(A_1 \vee A_2)$, $(A_1 \wedge A_2)$, $(A_1 \Rightarrow A_2)$, $(A_1 \equiv A_2)$ s'interprètent comme dans le calcul des propositions.
  $\mathcal{I}[(A_1 \wedge A_2)]$
  $= T$ si $\mathcal{I}[A_1] = T$ et $\mathcal{I}[A_2] = T$,
  $= F$ sinon.
  $\mathcal{I}[(A_1 \vee A_2)]$
  $= T$ si $\mathcal{I}[A_1] = T$ ou $\mathcal{I}[A_2] = T$,
  $= F$ sinon.
  $\mathcal{I}[(A_1 \Rightarrow A_2)]$
  $= T$ si $\mathcal{I}[A_1] = F$ ou $\mathcal{I}[A_2] = T$,
  $= F$ sinon.
  $\mathcal{I}[(A_1 \equiv A_2)]$
  $= T$ si $\mathcal{I}[A_1] = \mathcal{I}[A_2]$,
  $= F$ si $\mathcal{I}[A_1] \neq \mathcal{I}[A_2]$.

Règles d'interprétation III

Notation : Si $\mathcal{I} = (D_{\mathcal{I}}, I_c, I_v)$ est une interprétation, si x est une variable et d un élément de $D_{\mathcal{I}}$, alors $\mathcal{I}_{x/d}$ désigne l'interprétation $\mathcal{J} = (D_{\mathcal{J}}, J_c, J_v)$ telle que
- $D_{\mathcal{J}} = D_{\mathcal{I}}$,
- $J_c = I_c$,
- $J_v[x] = d$ et $J_v[y] = I_v[y]$ pour toute variable y distincte de x.

- Si A est une formule et x une variable,
  $\mathcal{I}[\forall x A]$
  $= T$ si $\mathcal{I}_{x/d}[A] = T$ pour tout élément d de D,
  $= F$ sinon.
- Si A est une formule et x une variable,
  $\mathcal{I}[\exists x A]$
  $= T$ si $\mathcal{I}_{x/d}[A] = T$ pour au moins un élément d de D,
  $= F$ sinon.

Capture de variable

Les règles d'interprétation des quantifications sont conformes à l'intuition traduite par les noms des quantificateurs. Il faut quand même souligner deux points, inhérents à l'emploi d'un même lexique pour les variables libres et les variables liées.
- La valeur de $\mathcal{I}[\forall x\, A(x)]$ ne dépend pas de $\mathcal{I}[x]$.
- Si $\mathcal{I}[\forall x\, A(x)] = T$, alors $\mathcal{I}[A(t)] = T$, pour tout terme t ne donnant lieu à *aucune capture de variable*.
  Exemple. Si $\forall x\, \exists y\, p(x, y)$ est vrai, alors les *instances* $\exists y\, p(a, y)$, $\exists y\, p(x, y)$ et $\exists y\, p(z, y)$ sont nécessairement vraies, mais l'instance $\exists y\, p(y, y)$ peut être fausse. Dans cette instance, l'occurrence y premier argument de p a été capturée et est devenue liée.
  Conclusion. On ne peut pas dire que $\exists y\, p(y, y)$ est une instance licite de $\forall x\, \exists y\, p(x, y)$; on ne peut pas substituer y à x dans $\exists y\, p(x, y)$. Si on veut quand même effectuer cette substitution ou instantiation, on commencera par renommer la variable liée pour éviter la *capture*. On pourra dire, par exemple, que $\exists z\, p(y, z)$ est une instance (après renommage) de $\forall x\, \exists y\, p(x, y)$, ou le résultat de la substitution (après renommage) de y à x dans $\exists y\, p(x, y)$.

On omettra souvent de rappeler que les instantiations et substitutions donnant lieu à capture sont interdites.

Satisfaction, modèle

Une formule A *est vraie pour une interprétation* $\mathcal{I}$ ou A *est satisfaite par une interprétation* $\mathcal{I}$ ou $\mathcal{I}$ *est un modèle de* A si $\mathcal{I}[A] = T$. Cela se note $\models_{\mathcal{I}} A$.

NB : On écrit aussi $\mathcal{I} \models A$,
ce qui peut porter à confusion.

Exemples : Formule A : $\forall x\, p(a, x)$
- $D_{\mathcal{I}_1} = \mathbf{N}$, $I_{1c}[p] = \leq$, $I_{1c}[a] = 0$: $\models_{\mathcal{I}_1} A$
- $D_{\mathcal{I}_2} = \mathbf{N}$, $I_{2c}[p] = \leq$, $I_{2c}[a] = 1$: $\not\models_{\mathcal{I}_2} A$
- $D_{\mathcal{I}_3} = \mathbf{Z}$, $I_{3c}[p] = \leq$, $I_{3c}[a] = 0$: $\not\models_{\mathcal{I}_3} A$
- $D_{\mathcal{I}_4} = \mathcal{S}$, $I_{4c}[p] = \sqsubseteq$, $I_{4c}[a] =$ '' : $\models_{\mathcal{I}_4} A$

Exemples

- $\forall x\, p(a, x)$ est consistant mais n'est pas valide.
  $D_{\mathcal{I}_1} = \mathbf{N}$, $I_{1c}[p] = \leq$, $I_{1c}[a] = 0$: $\models_{\mathcal{I}_1} A$
  $D_{\mathcal{I}_3} = \mathbf{Z}$, $I_{3c}[p] = \leq$, $I_{3c}[a] = 0$: $\not\models_{\mathcal{I}_3} A$
- $\forall x\, p(x) \Rightarrow p(a)$ est valide.
- $\exists x\, p(x) \Rightarrow p(a)$ est consistant mais non valide.

Une formule consistante mais non valide est dite *simplement consistante* ou *contingente*.

Remarque. Tout schéma propositionnel valide est aussi un schéma prédicatif valide. Par exemple, du schéma propositionnel valide

$$\neg\neg A \equiv A,$$

on peut déduire $\neg\neg(p \wedge q) \equiv (p \wedge q)$,

mais aussi $\neg\neg\forall x p(x) \equiv \forall x p(x)$.

Satisfaisabilité, validité

Notions semblables à celles du calcul des propositions.

Définitions.
Soit A une formule du calcul des prédicats.
- A est *satisfaisable* ou *consistant*
  si A a au moins un modèle.
- A est *valide* (cela se note $\models A$),
  si $\mathcal{I}[A] = T$ pour toute interprétation $\mathcal{I}$.
  (formule propos. valide = *tautologie*)
- A est *insatisfaisable* ou *inconsistant*
  si A n'est pas satisfaisable, donc
  si $\mathcal{I}[A] = F$ pour toute interprétation $\mathcal{I}$.

Théorème (dualité validité – consistance).
A est valide ssi $\neg A$ est inconsistant.

Exemples de formules valides

- $(\forall x A \wedge \forall x B) \equiv \forall x(A \wedge B)$
- $(\forall x A \vee \forall x B) \Rightarrow \forall x(A \vee B)$
- $\forall x(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\forall x A \Rightarrow \forall x B)$
- $\forall x(A \equiv B) \Rightarrow (\forall x A \equiv \forall x B)$

- $\exists x(A \vee B) \equiv (\exists x A \vee \exists x B)$
- $\exists x(A \wedge B) \Rightarrow (\exists x A \wedge \exists x B)$
- $\exists x(A \Rightarrow B) \equiv (\forall x A \Rightarrow \exists x B)$

- $\forall x A \equiv \neg(\exists x \neg A)$

- $\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$
- $\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$
- $\exists x \forall y A \Rightarrow \forall y \exists x A$

Conséquence et équivalence logiques I

Notions semblables à celles du calcul des propositions.

Définitions. Soit U un ensemble de formules et soient A et B deux formules.

– A est une *conséquence logique* de U (cela se note $U \models A$) si A est vrai dans tous les modèles de U.

  Remarque. L'ensemble U sera souvent une *théorie*, c'est-à-dire un ensemble de formules fermées. On a alors $U \models A$ ssi $U \models \forall x\, A$.

– A et B sont *logiquement équivalentes* (cela se note $A \leftrightarrow B$) si $\mathcal{I}[A] = \mathcal{I}[B]$ pour toutes les interprétations $\mathcal{I}$.

Comme dans le calcul des propositions, on a

$$\models A \quad \text{ssi} \quad \emptyset \models A\,.$$

Conséquence et équivalence logiques II

Théorème. Une formule est valide (consistante) si et seulement si sa fermeture universelle (existentielle) est valide (consistante).

Théorème. Deux formules A et B sont logiquement équivalentes si et seulement si la formule $A \equiv B$ est valide.

Le théorème découle immédiatement des définitions et des règles d'interprétation. Il permet de considérer le problème de la validité et de la consistance seulement pour les formules fermées. Lors de la fermeture d'une formule, l'ordre des quantifications n'a pas d'importance (c'est pourquoi on parle de "la" fermeture universelle ou existentielle d'une formule).

Théorème. Soit A une sous-formule d'une formule B et soit A' une formule telle que $A \leftrightarrow A'$. Soit B' la formule résultant du remplacement de A par A' dans B.
On a $B \leftrightarrow B'$.

LES TABLEAUX SEMANTIQUES

Principe : recherche systématique de modèles.
Dans le calcul des prédicats, la recherche d'un modèle nécessitera l'instantiation de formules quantifiées.

Exemple 1.

$$\begin{array}{c}
\neg\Big(\forall x\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big) \Rightarrow \big(\forall x\, p(x) \Rightarrow \forall x\, q(x)\big)\Big) \\
\downarrow \\
\forall x\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big), \neg\big(\forall x\, p(x) \Rightarrow \forall x\, q(x)\big) \\
\downarrow \\
\forall x\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big), \forall x\, p(x), \neg\forall x\, q(x) \\
\downarrow \\
\forall x\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big), \forall x\, p(x), \neg q(a) \\
\downarrow \\
\forall x\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big), p(a), \neg q(a) \\
\downarrow \\
p(a) \Rightarrow q(a), p(a), \neg q(a) \\
\swarrow \qquad\qquad \searrow \\
\begin{array}{cc} \neg p(a), p(a), \neg q(a) & \qquad q(a), p(a), \neg q(a) \\ \times & \qquad \times \end{array}
\end{array}$$

On a d'abord instancié $\neg\forall x q(x)$ (formule existentielle, équivalente à $\exists x\, \neg q(x)$), en $\neg q(a)$. On a ensuite instancié les formules universelles $\forall x\, p(x)$ et $\forall x\, (p(x) \Rightarrow q(x))$ en $p(a)$ et $p(a) \Rightarrow q(a)$. Intuitivement, une existentielle sera instanciée une seule fois (par branche), en utilisant une constante spécifique ; au contraire, une universelle pourra être instanciée plusieurs fois, au moyen de toutes les constantes disponibles. Pour rendre ceci rigoureux, il faudra préciser les mots "spécifique" et "disponible".

Exemple 2.

$$\begin{array}{c}
\neg\Big(\forall x\big(p(x) \lor q(x)\big) \Rightarrow \big(\forall x\, p(x) \lor \forall x\, q(x)\big)\Big) \\
\downarrow \\
\forall x\big(p(x) \lor q(x)\big), \neg\big(\forall x\, p(x) \lor \forall x\, q(x)\big) \\
\downarrow \\
\forall x\big(p(x) \lor q(x)\big), \neg\forall x\, p(x), \neg\forall x\, q(x) \\
\downarrow \\
\forall x\big(p(x) \lor q(x)\big), \neg\forall x\, p(x), \neg q(a) \\
\downarrow \\
\forall x\big(p(x) \lor q(x)\big), \neg p(a), \neg q(a) \\
\downarrow \\
p(a) \lor q(a), \neg p(a), \neg q(a) \\
\swarrow \qquad\qquad \searrow \\
\begin{array}{cc} p(a), \neg p(a), \neg q(a) & \qquad q(a), \neg p(a), \neg q(a) \\ \times & \qquad \times \end{array}
\end{array}$$

Mais la formule racine admet un modèle ; la formule
$\forall x\big(p(x) \lor q(x)\big) \Rightarrow \big(\forall x\, p(x) \lor \forall x\, q(x)\big)$ n'est pas valide !

Le problème est lié au choix de la même constante a dans l'instantiation de $\neg\forall x\, p(x)$ et de $\neg\forall x\, q(x)$. La formule est vraie dans toute interprétation dont le domaine a un seul élément.

On recommence donc la dérivation, en utilisant pour les existentielles deux constantes distinctes a et b. Cela implique naturellement que l'universelle soit instanciée au moyen de a *et* de b.

Dérivation correcte :

$$\neg\Big(\forall x\big(p(x)\vee q(x)\big)\Rightarrow\big(\forall x\,p(x)\vee\forall x\,q(x)\big)\Big)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\big(p(x)\vee q(x)\big),\neg\big(\forall x\,p(x)\vee\forall x\,q(x)\big)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\big(p(x)\vee q(x)\big),\neg\forall x\,p(x),\neg\forall x\,q(x)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\big(p(x)\vee q(x)\big),\neg\forall x\,p(x),\neg q(a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\big(p(x)\vee q(x)\big),\neg p(b),\neg q(a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\big(p(x)\vee q(x)\big),p(a)\vee q(a),\neg p(b),\neg q(a)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\big(p(x)\vee q(x)\big),p(b)\vee q(b),p(a)\vee q(a),\neg p(b),\neg q(a)$$
$$\begin{array}{ccc} \swarrow & & \searrow \\ \begin{array}{l}\forall x\big(p(x)\vee q(x)\big),p(b),\\ p(a)\vee q(a),\neg p(b),\\ \neg q(a)\end{array} & & \begin{array}{c}\forall x\big(p(x)\vee q(x)\big),q(b)\\ p(a)\vee q(a),\neg p(b),\neg q(a)\end{array} \\ \times & & \begin{array}{ccc} \swarrow & & \searrow \\ \begin{array}{c}\forall x\big(p(x)\vee q(x)\big),\\ q(b),p(a),\\ \neg p(b),\neg q(a)\end{array} & & \begin{array}{c}\forall x\big(p(x)\vee q(x)\big),\\ q(b),q(a),\\ \neg p(b),\neg q(a)\end{array} \\ \bigcirc & & \times \end{array} \end{array}$$

La formule $\neg\Big(\forall x\big(p(x)\vee q(x)\big)\Rightarrow\big(\forall x\,p(x)\vee\forall x\,q(x)\big)\Big)$ a un modèle $\mathcal{I}$ tel que

$$\mathcal{I}[p(a)]=\mathcal{I}[q(b)]=T\quad\text{et}\quad\mathcal{I}[p(b)]=\mathcal{I}[q(a)]=F.$$

Exemple 3.

$$\forall x\exists y\,p(x,y)\wedge\forall x\neg p(x,x)\wedge\forall x\forall y\forall z\big(p(x,y)\wedge p(y,z)\Rightarrow p(x,z)\big)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\exists y\,p(x,y),\forall x\neg p(x,x)\wedge\forall x\forall y\forall z\big(p(x,y)\wedge p(y,z)\Rightarrow p(x,z)\big)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\exists y\,p(x,y),\forall x\neg p(x,x),\forall x\forall y\forall z\big(p(x,y)\wedge p(y,z)\Rightarrow p(x,z)\big)$$
$$\downarrow$$
$$\begin{array}{c}\forall x\exists y\,p(x,y),\exists y\,p(a_1,y),\\ \forall x\neg p(x,x),\forall x\forall y\forall z\big(p(x,y)\wedge p(y,z)\Rightarrow p(x,z)\big)\end{array}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{array}{c}\forall x\exists y\,p(x,y),p(a_1,a_2),\\ \forall x\neg p(x,x),\forall x\forall y\forall z\big(p(x,y)\wedge p(y,z)\Rightarrow p(x,z)\big)\end{array}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{array}{c}\forall x\exists y\,p(x,y),p(a_1,a_2),\exists y\,p(a_3,y),\\ \forall x\neg p(x,x),\forall x\forall y\forall z\big(p(x,y)\wedge p(y,z)\Rightarrow p(x,z)\big)\end{array}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{array}{c}\forall x\exists y\,p(x,y),p(a_1,a_2),p(a_3,a_4),\\ \forall x\neg p(x,x),\forall x\forall y\forall z\big(p(x,y)\wedge p(y,z)\Rightarrow p(x,z)\big)\end{array}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{array}{c}\forall x\exists y\,p(x,y),p(a_1,a_2),p(a_3,a_4),\exists y\,p(a_5,y),\\ \forall x\neg p(x,x),\forall x\forall y\forall z\big(p(x,y)\wedge p(y,z)\Rightarrow p(x,z)\big)\end{array}$$
$$\downarrow$$
$$\vdots$$

Tableau sémantique ni ouvert ni fermé, mais infini !
Ce tableau définit un modèle infini de la formule (dépourvue de modèle fini).

Exemple 4.

$$\forall x\exists y\,p(x,y)\wedge\forall x\neg p(x,x)\wedge\forall x\forall y\forall z\big(p(x,y)\wedge p(y,z)\Rightarrow p(x,z)\big)\wedge\forall x\big(q(x)\wedge\neg q(x)\big)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\exists y\,p(x,y),\forall x\neg p(x,x)\wedge\forall x\forall y\forall z\big(p(x,y)\wedge p(y,z)\Rightarrow p(x,z)\big)\wedge\forall x\big(q(x)\wedge\neg q(x)\big)$$
$$\downarrow$$
$$\begin{array}{c}\forall x\exists y\,p(x,y),\\ \forall x\neg p(x,x),\forall x\forall y\forall z\big(p(x,y)\wedge p(y,z)\Rightarrow p(x,z)\big)\wedge\forall x\big(q(x)\wedge\neg q(x)\big)\end{array}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{array}{c}\forall x\exists y\,p(x,y),\\ \forall x\neg p(x,x),\forall x\forall y\forall z\big(p(x,y)\wedge p(y,z)\Rightarrow p(x,z)\big),\\ \forall x\big(q(x)\wedge\neg q(x)\big)\end{array}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{array}{c}\forall x\exists y\,p(x,y),\\ \forall x\neg p(x,x),\forall x\forall y\forall z\big(p(x,y)\wedge p(y,z)\Rightarrow p(x,z)\big),\\ \forall x\big(q(x)\wedge\neg q(x)\big),q(a)\wedge\neg q(a)\end{array}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{array}{c}\forall x\exists y\,p(x,y),\\ \forall x\neg p(x,x)\wedge\forall x\forall y\forall z\big(p(x,y)\wedge p(y,z)\Rightarrow p(x,z)\big),\\ \forall x\big(q(x)\wedge\neg q(x)\big),q(a),\neg q(a)\end{array}$$
$$\times$$

Si, comme dans l'exemple 3, on instancie indéfiniment $\forall x\exists y\,p(x,y)$,
la branche ne se ferme pas !

Exemple 5.

$$\neg\big(\forall x\exists y\,(p(x)\Rightarrow q(y))\Rightarrow\exists y\forall x\,(p(x)\Rightarrow q(y))\big)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\exists y\,(p(x)\Rightarrow q(y))\,,\ \neg\exists y\forall x\,(p(x)\Rightarrow q(y))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\exists y\,(p(x)\Rightarrow q(y))\,,\ \neg\forall x\,(p(x)\Rightarrow q(c))\,,\ \neg\exists y\forall x\,(p(x)\Rightarrow q(y))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\exists y\,(p(x)\Rightarrow q(y))\,,\ \neg(p(a)\Rightarrow q(c))\,,\ \neg\exists y\forall x\,(p(x)\Rightarrow q(y))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\exists y\,(p(x)\Rightarrow q(y))\,,\ p(a)\,,\ \neg q(c)\,,\ \neg\exists y\forall x\,(p(x)\Rightarrow q(y))$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\exists y\,(p(x)\Rightarrow q(y))\,,\ \neg\exists y\forall x\,(p(x)\Rightarrow q(y))\,,\ \exists y\,(p(a)\Rightarrow q(y))\,,\ p(a)\,,\ \neg q(c)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\exists y\,(p(x)\Rightarrow q(y))\,,\ \neg\exists y\forall x\,(p(x)\Rightarrow q(y))\,,\ p(a)\Rightarrow q(b)\,,\ p(a)\,,\ \neg q(c)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\exists y\,(p(x)\Rightarrow q(y))\,,\ \neg\forall x\,(p(x)\Rightarrow q(b))\,,\ \neg\exists y\forall x\,(p(x)\Rightarrow q(y))\,,\ p(a)\Rightarrow q(b)\,,\ p(a)\,,\ \neg q(c)$$
$$\downarrow$$
$$\forall x\exists y\,(p(x)\Rightarrow q(y))\,,\ \neg\exists y\forall x\,(p(x)\Rightarrow q(y))\,,\ \neg(p(d)\Rightarrow q(b))\,,\ p(a)\Rightarrow q(b)\,,\ p(a)\,,\ \neg q(c)$$
$$\downarrow$$
$$\begin{array}{c}\forall x\exists y\,(p(x)\Rightarrow q(y))\,,\ \neg\exists y\forall x\,(p(x)\Rightarrow q(y))\\ p(d)\,,\ \neg q(b)\,,\ p(a)\Rightarrow q(b)\,,\ p(a)\,,\ \neg q(c)\end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} \swarrow & & \searrow \\ \begin{array}{c}\forall x\exists y\,(\ldots)\,,\ \neg\exists y\forall x\,(\ldots)\\ p(d),\ \neg q(b),\ \neg p(a),\ p(a),\ \neg q(c)\end{array} & & \begin{array}{c}\forall x\exists y\,(\ldots)\,,\ \neg\exists y\forall x\,(\ldots)\\ p(d),\ \neg q(b),\ q(b),\ p(a),\ \neg q(c)\end{array} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \times & & \times \end{array}$$

Exemple 6.

$$
\begin{array}{c}
\neg\big(\forall x \exists y\,(p(x) \wedge q(y)) \Rightarrow \exists y \forall x\,(p(x) \wedge q(y))\big)\\
\downarrow\\
\forall x \exists y\,(p(x) \wedge q(y))\,,\ \neg\exists y \forall x\,(p(x) \wedge q(y))\\
\downarrow\\
\forall x \exists y\,(p(x) \wedge q(y))\,,\ \exists y\,(p(c) \wedge q(y))\,,\ \neg\exists y \forall x\,(p(x) \wedge q(y))\\
\downarrow\\
\forall x \exists y\,(p(x) \wedge q(y))\,,\ (p(c) \wedge q(a))\,,\ \neg\exists y \forall x\,(p(x) \wedge q(y))\\
\downarrow\\
\forall x \exists y\,(p(x) \wedge q(y))\,,\ p(c)\,,\ q(a))\,,\ \neg\exists y \forall x\,(p(x) \wedge q(y))\\
\downarrow\\
\forall x \exists y\,(p(x) \wedge q(y))\,,\ \neg\exists y \forall x\,(p(x) \wedge q(y))\,,\ p(c)\,,\ q(a))\,,\ \neg\forall x\,(p(x) \wedge q(a))\\
\downarrow\\
\forall x \exists y\,(p(x) \wedge q(y))\,,\ \neg\exists y \forall x\,(p(x) \wedge q(y))\,,\ p(c)\,,\ q(a))\,,\ \neg(p(b) \wedge q(a))\\
\downarrow\\
\forall x \exists y\,(p(x) \wedge q(y))\,,\ \neg\exists y \forall x\,(p(x) \wedge q(y))\,,\ \exists y\,(p(b) \wedge q(y))\,,\ p(c)\,,\ q(a))\,,\ \neg(p(b) \wedge q(a))\\
\downarrow\\
\forall x \exists y\,(p(x) \wedge q(y))\,,\ \neg\exists y \forall x\,(p(x) \wedge q(y))\,,\ (p(b) \wedge q(d))\,,\ p(c)\,,\ q(a))\,,\ \neg(p(b) \wedge q(a))\\
\downarrow\\
\forall x \exists y\,(p(x) \wedge q(y))\,,\ \neg\exists y \forall x\,(p(x) \wedge q(y))\,,\ p(b)\,,\ q(d)\,,\ p(c)\,,\ q(a)\,,\ \neg(p(b) \wedge q(a))\\
\swarrow \qquad\qquad\qquad \searrow\\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}\forall x \exists y\,(\ldots)\,,\ \neg\exists y \forall x\,(\ldots)\\ p(b)\,,\ q(d)\,,\ p(c)\,,\ q(a)\,,\ \neg p(b)\\ \downarrow\\ \times\end{array}
&
\begin{array}{c}\forall x \exists y\,(\ldots)\,,\ \neg\exists y \forall x\,(\ldots)\\ p(b)\,,\ q(d)\,,\ p(c)\,,\ q(a)\,,\ \neg q(a)\\ \downarrow\\ \times\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Interprétation des exemples

Les exemples 1 et 2 suggèrent que l'instantiation des existentielles, ou *exemplification*, se fasse au moyen de constantes *inédites*, appelées aussi *paramètres*. Y a-t-il un risque de ne pas reconnaître la consistance d'une formule A, qui n'admettrait que des "petits" modèles ? Non, car en l'absence du prédicat spécial d'égalité, si $\{a, b\}$ par exemple est le domaine d'un modèle de A, $\{a, a_1, \ldots, b, b_1, \ldots\}$ donnera aussi lieu à un modèle, si les a_i et b_j sont des "clones" de a et b, c'est-à-dire tels que φ, $\varphi[a/a_i]$ et $\varphi[b/b_j]$ aient même valeur de vérité, pour toute formule φ.

L'exemple 3 montre que la construction d'un tableau sémantique peut ne pas se terminer, en particulier si la formule étudiée est consistante mais n'admet que des modèles infinis. On espère néanmoins que la méthode permettra toujours de reconnaître les formules *inconsistantes*.

L'exemple 4 indique enfin que cette inconsistance pourrait n'être pas reconnue si les règles de décomposition ne sont pas appliquées de manière "équitable" ; il faut notamment se méfier de la règle *générative* d'instantiation des universelles, qui peut s'appliquer indéfiniment. On *doit* l'appliquer à toute constante introduite par la règle d'exemplification (sauf si la branche se ferme).

Règles de décomposition

– *Règles de prolongation (type α) et de ramification (type β)*

α	α_1	α_2
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \Rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \Leftarrow A_2)$	$\neg A_1$	A_2

β	β_1	β_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \Rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$B_1 \Leftarrow B_2$	B_1	$\neg B_2$

– *Règles génératives (type γ) et d'exemplification (type δ)*

γ	$\gamma(a)$
$\forall x\, A(x)$	$\forall x\, A(x)\,,\ A(c)$
$\neg\exists x\, A(x)$	$\neg\exists x\, A(x)\,,\ \neg A(c)$

δ	$\delta(a)$
$\exists x\, A(x)$	$A(a)$
$\neg\forall x\, A(x)$	$\neg A(a)$

La constante c est quelconque, la constante a est inédite.

Construction d'un tableau sémantique

Initialisation : une racine étiquetée $\{A\}$.

Etape inductive : sélectionner une feuille non marquée ℓ ; soit $U(\ell)$ son étiquette.
– Si $U(\ell)$ contient une paire complém. de littéraux, marquer ℓ comme *fermée* '$\times$' ;
– Si $U(\ell)$ n'est pas un ensemble de littéraux, sélectionner une formule dans $U(\ell)$:
  – si c'est une α-formule A, créer un nouveau nœud ℓ', descendant de ℓ, et étiqueter ℓ' avec
    $U(\ell') = (U(\ell) - \{A\}) \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$;
  – si c'est une β-formule B, créer deux nouveaux nœuds ℓ' et ℓ'', descendants de ℓ, et étiqueter ℓ' avec $U(\ell') = (U(\ell) - \{B\}) \cup \{\beta_1\}$ et étiqueter ℓ'' avec $U(\ell'') = (U(\ell) - \{B\}) \cup \{\beta_2\}$;
  – si c'est une γ-formule C, créer un nouveau nœud ℓ', descendant de ℓ, et étiqueter ℓ' avec
    $U(\ell') = U(\ell) \cup \{\gamma(a)\}$;
  – si c'est une δ-formule D, créer un nouveau nœud ℓ', descendant de ℓ, et étiqueter ℓ' avec
    $U(\ell') = (U(\ell) - \{D\}) \cup \{\delta(a)\}$
    où a est une cte *qui n'apparaît pas* dans $U(\ell)$.

Terminaison : si toutes les feuilles sont fermées.
La terminaison n'est pas garantie (règles génératives).

Tableaux sémantiques, adéquation

Théorème. $T(A)$ fermé $\Rightarrow$ A inconsistant.
Démonstration. On montre que tout sous-arbre (racine n) de $T(A)$ fermé est étiqueté par un ensemble inconsistant ; on procède par induction sur la hauteur h du nœud n dans $T(A)$.

- $h = 0$: n feuille fermée, donc $U(n)$ inconsistant.
- $h > 0$: une règle α, β, γ ou δ a été utilisée pour créer le(s) descendant(s) de n.

  Règle α **ou** β : cfr. calcul propositionnel.

  Règle γ :
  $$\begin{array}{lcc} n & : & \{\forall x\, A(x)\} \cup U_0 \\ & & \downarrow \\ n' & : & \{\forall x\, A(x), A(a)\} \cup U_0 \end{array}$$
  $U(n')$ est inconsistant (hypothèse inductive),
  donc $U(n)$ est inconsistant.

  Règle δ :
  $$\begin{array}{lcc} n & : & \{\exists x\, A(x)\} \cup U_0 \\ & & \downarrow \\ n' & : & \{A(a)\} \cup U_0 \end{array}$$
  où a est une cte qui n'apparaît pas dans $U(n)$.
  Si $U(n)$ était consistant, il existerait une interprétation $\mathcal{I} = (D, I_c, I_v)$:
  $\mathcal{I}[\exists x\, A(x)] = T$,
  donc il existerait $d \in D$ tel que $\mathcal{I}_{x/d}[A(x)] = T$.
  Définissons $\mathcal{J} = (D, J_c, I_v)$ avec J_c obtenu en étendant I_c de sorte que $J_c[a] = d$.
  Alors, $\mathcal{J}[A(a)] = T$ et $\mathcal{J}[U_0] = \mathcal{I}[U_0] = T$,
  donc $\mathcal{J}$ satisfait $U(n')$, une contradiction.

Stratégie de construction I

Il faut adopter une stratégie qui garantisse les deux conditions suivantes.

- Toute formule qui apparaît sur une branche ouverte de l'arbre se voit appliquer une règle de décomposition quelque part sur cette branche.
  Autrement dit, toute formule décomposable est décomposée, à moins que la branche se ferme.
- Pour toute γ-formule A et toute cte a qui apparaissent sur une branche ouverte, une règle d'instantiation est appliquée à la formule A avec la cte a quelque part sur cette branche.
  Toute constante apparaissant sur une branche est utilisée à un moment donné pour instancier les γ-formules sur cette branche, à moins qu'elle se ferme.

Stratégie de construction II

Un moyen simple et classique d'assurer l'équité est d'étiqueter les nœuds par des *listes* de formules. Le(s) nœud(s) successeurs de n est (sont) obtenus par "décomposition" de la première formule de la liste $U(n)$ non réduite à un littéral ; la liste $U(n')$ (et $U(n'')$, s'il y a lieu) est obtenue en supprimant de $U(n)$ la formule traitée, et en ajoutant en fin de liste le(s) "composant(s)" adéquats. (Dans le cas d'une formule générative, la formule supprimée en tête de liste est réinsérée en queue de liste.)

Lorsqu'une règle générative est activée, on peut convenir de générer immédiatement les instances correspondant à toutes les constantes introduites jusque là. De même, quand une exemplification est faite (la constante utilisée est toujours inédite), on doit veiller à ce que toutes les activations antérieures de règles génératives soient complétées des instances correspondant à cette nouvelle constante. Ceci nécessite une gestion organisée de l'ensemble des constantes et des activations de règles génératives.

La stratégie n'est pas nécessaire pour obtenir l'adéquation, mais elle l'est pour obtenir la *complétude*. Ce point est d'ailleurs délicat, puisque la construction d'un tableau sémantique peut ne pas se terminer.

On abordera la complétude comme dans le cas propositionnel, via la notion d'*ensemble de Hintikka*.

Ensemble de Hintikka, définition

Définition. Soit U un ensemble de formules, et C_U l'ensemble des constantes individuelles ayant au moins une occurrence dans U.
U est un *ensemble de Hintikka* si les cinq conditions suivantes sont satisfaites :

1. Si A est une formule atomique, soit $A \notin U$, soit $\neg A \notin U$.
2. Si $\alpha \in U$ est une α-formule, alors $\alpha_1 \in U$ et $\alpha_2 \in U$.
3. Si $\beta \in U$ est une β-formule, alors $\beta_1 \in U$ ou $\beta_2 \in U$.
4. Si γ est une γ-formule, alors pour tout $a \in C_U$ on a $\gamma(a) \in U$.
5. Si δ est une δ-formule, alors il existe $a \in C_U$ tel que $\delta(a) \in U$.

Ensemble de Hintikka, construction

Théorème. Soit *b* une branche ouverte d'un tableau T construit de manière systématique (cfr. stratégie). Alors $U = \bigcup_{n \in b} U(n)$ est un ensemble de Hintikka.

Démonstration. La condition d'ouverture assure le respect par U de la condition 1. Les règles α, β, γ et δ *permettent* l'insertion dans U des éléments requis par les conditions 2, 3, 4 et 5, respectivement. La stratégie de construction *impose* que tout élément ajoutable soit effectivement ajouté. ∎

Remarque. La branche *b* peut être infinie ; dans ce cas, elle est nécessairement ouverte et elle définit un modèle infini.

Tableaux sémantiques, complétude

Comme dans le cas propositionnel, on peut montrer que si un tableau sémantique (respectant la stratégie de construction) est ouvert, alors la formule étiquetant la racine est consistante. Un modèle est le modèle canonique de Hintikka associé à une branche ouverte.

On en déduit que si A est une formule inconsistante, tout tableau $T(A)$ (respectant la stratégie de construction) est fermé.

Rappelons que, dans le cadre prédicatif, une branche peut être infinie. Cependant, si on respecte la stratégie de construction, une branche infinie est nécessairement ouverte.

Pour analyser une formule A, on peut construire les tableaux sémantiques $T(A)$ et $T(\neg A)$. Si $T(A)$ est fermé (et donc fini), A est inconsistant. Si $T(\neg A)$ est fermé (et donc fini), A est valide. Si $T(A)$ et $T(\neg A)$ sont ouverts, A et $\neg A$ sont simplement consistants.

Dans le cas propositionnel, l'analyse se termine toujours. Dans le cas prédicatif, l'analyse *peut* ne pas se terminer si A et $\neg A$ sont simplement consistants.

Ensemble de Hintikka, modèle

Lemme de Hintikka.
Tout ensemble de Hintikka est consistant.

Démonstration. Soit U un ensemble de Hintikka. Le *modèle canonique* $\mathcal{I}_U = (D, I_c, I_v)$ associé à U est défini comme suit :

– $D = \{a, b, \dots, \}$ est l'ensemble des constantes apparaissant dans les formules de U ;

– – Pour toute constante $d \in D$:$I_c[d] = d$.

  – Pour tout symbole prédicatif p (arité m) apparaissant dans U :

$I_c[p](I_c[a_1], \dots, I_c[a_m])) = T$
  si $p(a_1, \dots, a_m) \in U$

$I_c[p](I_c[a_1], \dots, I_c[a_m])) = T$
  si $\neg p(a_1, \dots, a_m) \notin U$

$I_c[p](I_c[a_1], \dots, I_c[a_m])) = F$
  si $\neg p(a_1, \dots, a_m) \in U$

– I_v quelconque, puisque pas de variables libres.

Il reste à montrer que pour toute formule (fermée) $A \in U$, on a $\mathcal{I}[A] = T$. Cela se fait par induction sur la structure de A. (Exercice).