Logiques prédicatives décidables

Le calcul des prédicats est indécidable, mais admet des fragments intéressants décidables. Nous en considérons ici deux exemples, la logique des prédicats monadiques et la logique de Bernays et Schönfinkel.

La logique monadique généralise la théorie classique du **syllogisme catégorique,** à laquelle l'enseignement de la logique s'est limité pendant des siècles.

La formule de base et ses variantes

$\boxed{\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))}$	**A**	$\neg\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$
$\boxed{\forall x\,(P(x) \Rightarrow \neg Q(x))}$	**E**	$\neg\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$
$\neg\forall x\,(P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$	**I**	$\boxed{\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))}$
$\neg\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$	**O**	$\boxed{\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))}$

En interchangeant les rôles de P et Q, on obtient d'autres variantes, soit, en tout, huit "$\{P, Q\}$-formules".

A	universelle affirmative
E	universelle négative
I	particulière affirmative
O	particulière négative

"**A**ff**I**rmo"
"n**E**g**O**"

Le "jeu du syllogisme catégorique" consiste à choisir une $\{P, Q\}$-formule, une $\{Q, R\}$-formule et une $\{P, R\}$-formule, puis à déterminer si la troisième formule (la *conclusion*) est conséquence logique des deux premières (les *prémisses*). Il y a donc $8^3 = 512$ possibilités.

Dans la mesure où les rôles de P et de R sont interchangeables, on peut imposer que la conclusion soit de type PR (et non de type RP), ce qui élimine la moitié des possibilités.

On appelle *mineure* la $\{P, Q\}$-prémisse, et *majeure* la $\{Q, R\}$-prémisse ; les "termes" (atomes) $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ sont dits respectivement *mineur*, *moyen* et *majeur*.

La conclusion comporte le mineur *puis* le majeur. La prémisse mineure comporte le mineur et le moyen, la prémisse majeure comporte le majeur et le moyen ; dans les prémisses, l'ordre des deux termes n'est pas imposé. Notons aussi l'emploi classique du mot "terme" ; dans la terminologie moderne, $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ sont en fait des atomes, ou formules atomiques.

Le syllogisme catégorique est la règle d'inférence

$$\frac{majeure \qquad\qquad mineure}{conclusion}$$

Il y a 256 possibilités

Exemples de syllogismes

Tout sot est ennuyeux
Or certains bavards ne sont pas ennuyeux
Donc certains bavards ne sont pas sots

Les puissants ne sont pas miséricordieux
Or les enfants ne sont pas puissants
Donc les enfants ne sont pas miséricordieux

Certains poètes sont agréables
Or tous les poètes sont des génies
Donc certains génies sont agréables

Tout ce qui est vénéneux est nuisible
Or certains champignons sont nuisibles
Donc certains champignons sont vénéneux

Exemples de syllogismes

Tout sot est ennuyeux
Or certains bavards ne sont pas ennuyeux
Donc certains bavards ne sont pas sots

BAROCO

Les puissants ne sont pas miséricordieux
Or les enfants ne sont pas puissants
Donc les enfants ne sont pas miséricordieux

invalide

Certains poètes sont agréables
Or tous les poètes sont des génies
Donc certains génies sont agréables

DISAMIS

Tout ce qui est vénéneux est nuisible
Or certains champignons sont nuisibles
Donc certains champignons sont vénéneux

invalide

Figures et modes

Figure :	première	deuxième	troisième	quatrième
Majeure	QR	RQ	QR	RQ
Mineure	PQ	PQ	QP	QP
Conclusion	PR	PR	PR	PR

Le mode d'un syllogisme est déterminé par la nature des prémisses et de la conclusion. Par exemple, le mode AEI désigne le cas où la *majeure* est universelle affirmative (A), la *mineure* est universelle négative (E) et la *conclusion* est particulière affirmative (I). Il y a donc $4^3 = 64$ modes possibles, chacun pouvant exister dans les quatre figures.

Cependant, on peut vérifier que 12 modes seulement peuvent donner lieu à des syllogismes valides. Ce sont

AAA AAI AEE AEO AII AOO
EAE EAO EIO IAI IEO OAO

Règles mnémotechniques :

1. Si les deux prémisses sont négatives,
   le syllogisme n'est pas valide.
2. Si les deux prémisses sont particulières,
   le syllogisme n'est pas valide.
3. Si une prémisse est particulière,
   la conclusion doit être particulière.
4. Si une prémisse est négative,
   la conclusion doit être négative.
5. Si les deux prémisses sont affirmatives,
   la conclusion doit être affirmative.

Exemples. La première règle permet d'éliminer des modes tels que EEE et OEO ; la deuxième permet d'éliminer III (entre autres) ; la troisième provoque notamment le rejet de AIA ; des modes tels que AOI et AIO contreviennent respectivement aux quatrième et cinquième règles.

Il ne reste donc que $12 \times 4 = 48$ syllogismes potentiellement valides ; parmi ceux-ci, 15 syllogismes seulement sont effectivement valides.

Nomenclature

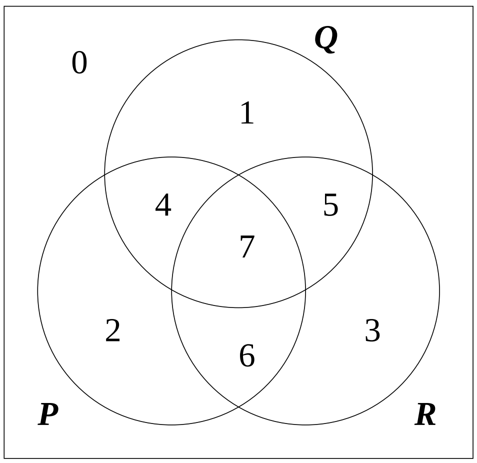
On énonce systématiquement la majeure avant la mineure, quoique l'ordre des prémisses soit sans influence sur la validité d'un raisonnement.

`(M)` *Tous les humains sont mortels.*
`(m)` *Tous les Grecs sont des humains.*
`(C)` *Tous les Grecs sont mortels.*
Première figure, mode AAA ; se note AAA-1 ou BARBARA.
Les trois "A" rappellent que les prémisses et la conclusion sont des universelles affirmatives.

`(M)` *Tous les étudiants sont intelligents.*
`(m)` *Certains humains ne sont pas intelligents.*
`(C)` *Certains humains ne sont pas des étudiants.*
Deuxième figure : AOO-2 ou BAROCO.
Majeure universelle affirmative,
mineure et conclusion, particulières négatives.

Diagrammes de Venn I

Un moyen simple et concret d'appréhender la validité d'un syllogisme consiste à utiliser un diagramme de Venn à trois composants.



Diagrammes de Venn II

Le cercle de gauche représente le mineur $P(x)$, celui de droite le majeur $R(x)$, le cercle du haut correspondant au moyen $Q(x)$. Ces cercles déterminent huit zones numérotées de 0 à 7.

Tout objet appartient à l'une de ces zones, selon la valeur de vérité qu'il attribue au mineur, au majeur et au moyen. Par exemple, la zone 4 est intérieure aux cercles mineur et moyen, mais extérieure au cercle majeur ; elle regroupe donc les objets rendant vrais le mineur et le moyen, mais faux le majeur.

Diagrammes de Venn III

Syllogisme AAA-1 BARBARA.
Prémisse majeure $\forall x\,(Q(x) \Rightarrow R(x))$:
les zones 1 et 4 sont vides.
Prémisse mineure $\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$:
les zones 2 et 6 sont vides.
Conclusion $\forall x\,(P(x) \Rightarrow R(x))$:
les zones 2 et 4 sont vides.

Syllogisme AOO-2 BAROCO.
Prémisse majeure $\forall x\,(R(x) \Rightarrow Q(x))$:
les zones 3 et 6 sont vides.
Prémisse mineure $\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$:
une au moins zones 2 et 6 est non vide.
Conclusion $\exists x\,(P(x) \wedge \neg R(x))$:
une au moins zones 2 et 4 est non vide.

Diagrammes de Venn IV

Le diagramme de Venn permet aussi de voir pourquoi un syllogisme n'est pas valide.
Considérons par exemple AIO-4.

La prémisse majeure $\forall x\,(R(x) \Rightarrow Q(x))$ devient $3 \cup 6 = \emptyset$.

La prémisse mineure $\exists x\,(Q(x) \wedge P(x))$ devient $4 \cup 7 \neq \emptyset$.

On ne peut pas déduire de cela $2 \cup 4 \neq \emptyset$, correspondant à la conclusion $\exists x\,(P(x) \wedge \neg R(x))$.

La situation où 2, 3, 4 et 6 sont vides tandis que 7 ne l'est pas vérifie les deux prémisses mais pas la conclusion.

Syllogismes : première figure

BARBARA $\dfrac{\begin{array}{c}\forall x\,[B(x) \Rightarrow C(x)]\\ \forall x\,[A(x) \Rightarrow B(x)]\end{array}}{\forall x\,[A(x) \Rightarrow C(x)]}$	CELARENT $\dfrac{\begin{array}{c}\forall x\,[B(x) \Rightarrow \neg C(x)]\\ \forall x\,[A(x) \Rightarrow B(x)]\end{array}}{\forall x\,[A(x) \Rightarrow \neg C(x)]}$
DARII $\dfrac{\begin{array}{c}\forall x\,[B(x) \Rightarrow C(x)]\\ \exists x\,[A(x) \wedge B(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge C(x)]}$	FERIO $\dfrac{\begin{array}{c}\forall x\,[B(x) \Rightarrow \neg C(x)]\\ \exists x\,[A(x) \wedge B(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge \neg C(x)]}$
BARBARI $\dfrac{\begin{array}{c}\exists x\, A(x)\\ \forall x\,[B(x) \Rightarrow C(x)]\\ \forall x\,[A(x) \Rightarrow B(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge C(x)]}$	CELARO $\dfrac{\begin{array}{c}\exists x\, A(x)\\ \forall x\,[B(x) \Rightarrow \neg C(x)]\\ \forall x\,[A(x) \Rightarrow B(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge \neg C(x)]}$

Syllogismes : deuxième figure

CAMESTRES $\dfrac{\begin{array}{c}\forall x\,[C(x) \Rightarrow B(x)]\\ \forall x\,[A(x) \Rightarrow \neg B(x)]\end{array}}{\forall x\,[A(x) \Rightarrow \neg C(x)]}$	CESARE $\dfrac{\begin{array}{c}\forall x\,[C(x) \Rightarrow \neg B(x)]\\ \forall x\,[A(x) \Rightarrow B(x)]\end{array}}{\forall x\,[A(x) \Rightarrow \neg C(x)]}$
BAROCO $\dfrac{\begin{array}{c}\forall x\,[C(x) \Rightarrow B(x)]\\ \exists x\,[A(x) \wedge \neg B(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge \neg C(x)]}$	FESTINO $\dfrac{\begin{array}{c}\forall x\,[C(x) \Rightarrow \neg B(x)]\\ \exists x\,[A(x) \wedge B(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge \neg C(x)]}$
CAMESTRO $\dfrac{\begin{array}{c}\exists x\, A(x)\\ \forall x\,[C(x) \Rightarrow B(x)]\\ \forall x\,[A(x) \Rightarrow \neg B(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge \neg C(x)]}$	CESARO $\dfrac{\begin{array}{c}\exists x\, A(x)\\ \forall x\,[C(x) \Rightarrow \neg B(x)]\\ \forall x\,[A(x) \Rightarrow B(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge \neg C(x)]}$

Syllogismes : troisième figure

DATISI $\dfrac{\begin{array}{c}\forall x\,[B(x) \Rightarrow C(x)]\\ \exists x\,[B(x) \wedge A(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge C(x)]}$	DISAMIS $\dfrac{\begin{array}{c}\exists x\,[B(x) \wedge C(x)]\\ \forall x\,[B(x) \Rightarrow A(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge C(x)]}$
BOCARDO $\dfrac{\begin{array}{c}\exists x\,[B(x) \wedge \neg C(x)]\\ \forall x\,[B(x) \Rightarrow A(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge \neg C(x)]}$	FERISON $\dfrac{\begin{array}{c}\forall x\,[B(x) \Rightarrow \neg C(x)]\\ \exists x\,[B(x) \wedge A(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge \neg C(x)]}$
DARAPTI $\dfrac{\begin{array}{c}\exists x\, B(x)\\ \forall x\,[B(x) \Rightarrow C(x)]\\ \forall x\,[B(x) \Rightarrow A(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge C(x)]}$	FELAPTON $\dfrac{\begin{array}{c}\exists x\, B(x)\\ \forall x\,[B(x) \Rightarrow \neg C(x)]\\ \forall x\,[B(x) \Rightarrow A(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge \neg C(x)]}$

Syllogismes : quatrième figure

CAMENES $\dfrac{\begin{array}{c}\forall x\,[C(x) \Rightarrow B(x)]\\ \forall x\,[B(x) \Rightarrow \neg A(x)]\end{array}}{\forall x\,[A(x) \Rightarrow \neg C(x)]}$	DIMARIS $\dfrac{\begin{array}{c}\exists x\,[C(x) \wedge B(x)]\\ \forall x\,[B(x) \Rightarrow A(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge C(x)]}$
CAMENO $\dfrac{\begin{array}{c}\exists x\, A(x)\\ \forall x\,[C(x) \Rightarrow B(x)]\\ \forall x\,[B(x) \Rightarrow \neg A(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge \neg C(x)]}$	FRESISON $\dfrac{\begin{array}{c}\forall x\,[C(x) \Rightarrow \neg B(x)]\\ \exists x\,[B(x) \wedge A(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge \neg C(x)]}$
BRAMANTIP $\dfrac{\begin{array}{c}\exists x\, C(x)\\ \forall x\,[C(x) \Rightarrow B(x)]\\ \forall x\,[B(x) \Rightarrow A(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge C(x)]}$	FESAPO $\dfrac{\begin{array}{c}\exists x\, B(x)\\ \forall x\,[C(x) \Rightarrow \neg B(x)]\\ \forall x\,[B(x) \Rightarrow A(x)]\end{array}}{\exists x\,[A(x) \wedge \neg C(x)]}$

Syllogismes "pseudo-valides"

Il suffit de passer en revue les 48 syllogismes "potentiellement valides" et d'appliquer la technique du diagramme de Venn à chacun d'eux pour isoler les quinze syllogismes valides. La plupart des auteurs mentionnent cependant plus de quinze syllogismes valides, parce qu'ils acceptent comme valide, au moins dans certains cas, le mécanisme de *subalternation.* La *subalterne* d'une PQ-formule universelle est la PQ-formule particulière (ou existentielle) correspondante.
Ce mécanisme n'est pas valide stricto sensu, puisque la subalterne n'est pas conséquence logique de l'universelle ; on a

$$\forall x[L(x) \Rightarrow D(x)] \not\models \exists x[L(x) \wedge D(x)] \,.$$

Cependant, on peut, au moyen d'une prémisse additionnelle, obtenir une version correcte de la subalternation :

$$\{\exists x\, L(x)\,,\ \forall x[L(x) \Rightarrow D(x)]\} \models \exists x[L(x) \wedge D(x)] \,.$$

Dans le langage naturel, on peut parfois considérer que la prémisse manquante est implicite ;
c'est le "présupposé d'existence".

Schémas monadiques sur x

Valider BARBARA revient à valider la disjonction
$\exists x\,[Q(x) \wedge \neg R(x)] \vee$
$\exists x\,[P(x) \wedge \neg Q(x)] \vee$
$\forall x\,[P(x) \Rightarrow R(x)]$

Valider FERIO revient à valider la disjonction
$\exists x\,[Q(x) \wedge R(x)] \vee$
$\forall x\,[P(x) \Rightarrow \neg Q(x)] \vee$
$\exists x\,[P(x) \wedge \neg R(x)]$

Généralisations :
Plus de trois prédicats ;
Fonctions booléennes quelconques.

Schémas monadiques booléens sur x

Combinaison booléenne (finie) de formes telles que $P(x), Q(x), \ldots$ résultant de l'application à la variable x d'un prédicat monadique.

Si un SMB $\Phi(x)$ admet un modèle, alors il admet un modèle à un seul élément.

Démonstration. Soit I une interprétation de $\Phi(x)$ de domaine D et soit $a \in D$ tel que $I[x] = a$. L'interprétation J de domaine $\{a\}$ telle que $J[x] = a$ et, pour tout prédicat (monadique) P, telle que $J[P]$ est la restriction à $\{a\}$ de $I[P]$ est telle que $J(\Phi) = I(\Phi)$.

Définition. Une interprétation *fondamentale* d'un SMB $\Phi(x)$ est une interprétation de $\Phi(x)$ dont le domaine comporte un seul élément.

Remarque. Les interprétations dont le domaine est un singleton ont une propriété intéressante dépassant le cadre monadique. Une telle interprétation attribue toujours la même valeur de vérité à une formule (quelconque), à sa fermeture universelle et à sa fermeture existentielle.

Etant donné le lexique $\Pi = \{P_1, \ldots, P_n\}$,
un SMB $\Phi(x)$ admet
2^n interprétations fondamentales distinctes.

Un SMB est valide s'il est vrai pour toutes les interprétations fondamentales ;
il est consistant s'il est vrai pour une interprétation fondamentale au moins.

Les schémas monadiques booléens peuvent être assimilés aux formules propositionnelles ;
ils ne sont donc pas intéressants en soi.

Schémas monadiques quantifiés sur x

La fermeture (existentielle ou universelle) d'un schéma monadique booléen sur x est un *schéma monadique quantifié (existentiel ou universel) sur la variable* x. Les prémisses et la conclusion d'un syllogisme sont des schémas monadiques quantifiés (SMQ).

La matrice d'un SMQ ne contient pas d'autre variable que la variable quantifiée (unique) ;
un SMQ est donc une formule fermée.

Théorème. Un schéma monadique quantifié est valide (resp. consistant, contingent) si et seulement si sa matrice est valide (resp. consistante, contingente).

Démonstration. Il suffit de démontrer que, pour tout schéma monadique booléen $\Phi(x)$, la validité de $\exists x\, \Phi(x)$ entraîne celle de $\Phi(x)$. On procède par l'absurde. Si $\Phi(x)$ admet un antimodèle, il existe un antimodèle à un seul élément ; celui-ci est nécessairement un antimodèle de $\exists x\, \Phi(x)$.

Corollaire. Si $\Phi(x)$ est un SMB, les trois formules $\Phi(x)$, $\forall x\, \Phi(x)$ et $\exists x\, \Phi(x)$ sont simultanéments valides, contingentes ou inconsistantes.

Remarque. En cas de validité ou d'inconsistance, les trois formules sont évidemment logiquement équivalentes, mais en cas de contingence, $\Phi(x)$ n'est jamais logiquement équivalente à l'une de ses fermetures.

Remarque. Ce corollaire montre que les schémas monadiques quantifiés, pris isolément, ne sont pas non plus très intéressants. En revanche, les combinaisons booléennes de tels schémas le sont, comme nous le voyons au paragraphe suivant. La formule correspondant à un syllogisme peut toujours s'écrire comme une disjonction de trois SMQ.