Les pages qui suivent comportent, à titre d'exemples, les questions d'algèbre depuis juillet 2003 jusqu'à septembre 2019, avec leurs solutions.

Pour l'épreuve d'algèbre,
les calculatrices sont interdites.

Consignes habituelles: Répondre aux trois questions sur **trois feuilles séparées**. Ne **pas** utiliser de **crayon**, ne **pas** utiliser de **rouge**. Indiquer sur chaque feuille le nom et le prénom en caractères d'imprimerie, le numéro d'étudiant, ainsi que le numéro de la question.

Juillet 2003

Question 1. Résoudre l'équation (en nombres complexes)

$$(2z^2-1)^3 \;=\; (z^2+1)^3\,.$$

Solution. On pose $Z=z^2$. L'équation devient

$$(2Z-1)^3=(Z+1)^3\,.$$

On sait que $A^3=B^3$ si et seulement si $A=B$ ou $A=jB$ ou $A=j^2B$, avec $j=(-1+\sqrt{3}i)/2$ et $j^2=(-1-\sqrt{3}i)/2$. Les trois solutions sont données par

1. $2Z-1=Z+1$, d'où $Z=2$.
2. $2(2Z-1)=(-1+\sqrt{3}i)(Z+1),\;\;(5-\sqrt{3}i)Z=1+\sqrt{3}i.$
3. $2(2Z-1)=(-1-\sqrt{3}i)(Z+1),\;\;(5+\sqrt{3}i)Z=1-\sqrt{3}i.$

En utilisant les égalités

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\,,$$

on récrit le triplet de solutions en

$$Z\in\left\{2\,,\;\frac{1+3\sqrt{3}i}{14}\,,\;\frac{1-3\sqrt{3}i}{14}\right\}\,.$$

Si b est positif, les solutions (x,y) de $\;a\pm bi=(x\pm yi)^2\;$ sont

$$\left(\sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}+a]/2},\sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}-a]/2}\right)\;\text{ et }\;\left(-\sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}+a]/2},-\sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}-a]/2}\right)\,;$$

cela permet d'énumérer les six solutions de l'équation initiale comme suit:

1. $z=\sqrt{2}\;$ et $\;z=-\sqrt{2}\,,$
2. $z=\sqrt{\dfrac{\sqrt{28}+1}{28}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{28}-1}{28}}i\;$ et $\;z=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{28}+1}{28}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{28}-1}{28}}i\,,$
3. $z=\sqrt{\dfrac{\sqrt{28}+1}{28}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{28}-1}{28}}i\;$ et $\;z=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{28}+1}{28}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{28}-1}{28}}i\,.$

Remarque. On peut récrire les solutions sans racine carrée au dénominateur:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{28}\pm1}{28}}=\sqrt{\frac{28\sqrt{28}\pm28}{28^2}}=\frac{\sqrt{28\sqrt{28}\pm28}}{28}=\frac{\sqrt{14\sqrt{7}\pm7}}{14}\,.$$

Question 2. Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{aligned} &ax + (a+1)y + (a-1)z = 2a + 3\,, \\ &x + (1+a)y + (1-a)z = 4a + 1\,, \\ &(a+1)x + 2(a+1)y = 6a + 4\,. \end{aligned}$$

Solution. On peut d'abord observer que la troisième équation est inutile, puisque c'est la somme des deux autres. En remplaçant la première équation par la différence de la première et de la seconde, on obtient

$$\begin{aligned} &(a-1)x + 2(a-1)z = -2(a-1)\,, \\ &x + (1+a)y + (1-a)z = 4a + 1\,. \end{aligned}$$

- Si $a = 1$, la première équation disparaît et le système se réduit à

  $$x + 2y = 5\,.$$

  Les solutions sont $x = 5 - 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = \mu$.

- Si $a = -1$, le système devient

  $$\begin{aligned} &x + 2z = -2\,, \\ &x + 2z = -3\,. \end{aligned}$$

  Il n'admet pas de solution.

- Dans les autres cas, c'est-à-dire quand $(a+1)(a-1) \neq 0$, le système devient

  $$\begin{aligned} &x + 2z = -2\,, \\ &x + (1+a)y + (1-a)z = 4a + 1\,. \end{aligned}$$

  les solutions sont $z = \lambda$, $x = -2 - 2\lambda$, $(1+a)y = 4a + 1 + 2 + 2\lambda + (a-1)\lambda = 4a + 3 + (a+1)\lambda$, c'est-à-dire $y = \lambda + \frac{4a+3}{a+1}$.

(λ et μ sont des paramètres quelconques.)

Question 3. Résoudre l'inéquation

$$\frac{x-2}{x+2} \ \geq \ \sqrt{-x} - 2\,.$$

Solution. Les deux membres de l'inégalité n'ont de sens que sur le domaine $]-\infty : -2[\ \cup \ ]-2:0]$. Sur ce domaine, l'inéquation se récrit en

$$2 + \frac{x-2}{x+2} \ \geq \ \sqrt{-x}\,, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{3x+2}{x+2} \ \geq \ \sqrt{-x}\,,$$

ou encore

$$\big[\, x < -2 \ \text{ et } \ 3x+2 \leq \sqrt{-x}(x+2)\,\big] \quad \text{ou} \quad \big[\,-2 < x \leq 0 \ \text{ et } \ 3x+2 \geq \sqrt{-x}(x+2)\,\big]\ .$$

Dans la première partie, les deux membres de l'inégalité sont négatifs mais, dans la seconde partie, les deux membres doivent être positifs, d'où $-2 < x \leq 0$ peut être précisé en $-2/3 < x \leq 0$. En élevant au carré et en regroupant, on obtient

$$(x < -2 \ \text{ ou } \ -2/3 < x \leq 0) \ \text{ et } \ (3x+2)^2 \geq -x(x+2)^2\,,$$

c'est-à-dire

$$(x < -2 \ \text{ ou } \ -2/3 < x \leq 0) \ \text{ et } \ x^3 + 13x^2 + 16x + 4 \geq 0\,,$$

ou encore

$$(x < -2 \ \text{ ou } \ -2/3 < x \leq 0) \ \text{ et } \ (x+1)(x^2 + 12x + 4) \geq 0\,.$$

c'est-à-dire

$$(x < -2 \ \text{ ou } \ -2/3 < x \leq 0) \ \text{ et } \ (x+1)(x+6+4\sqrt{2})(x+6-4\sqrt{2}) \geq 0\,.$$

Comme on a

$$-6-4\sqrt{2} \ < \ -2 \ < \ -2/3 \ < \ -6+4\sqrt{2} \ < \ 0\,,$$

les solutions de l'inéquation forment l'ensemble

$$[-6-4\sqrt{2} : -2[\quad \cup \quad [-6+4\sqrt{2} : 0]\,.$$

Septembre 2003

Question 1. Résoudre l'équation (en nombres complexes)

$$z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1 \;=\; 0\,.$$

Suggestion: développer $(z^2+1)^4$.

Solution. En développant, on obtient

$$(z^2+1)^4 \;=\; z^8 + 4z^6 + 6z^4 + 4z^2 + 1\,.$$

L'équation proposée peut donc se récrire en

$$(z^2+1)^4 - 16z^4 \;=\; 0$$

ou encore, en tenant compte de ce que $z = 0$ n'est pas solution, en

$$\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^4 \;=\; 1\,,$$

c'est-à-dire

$$\frac{z^2+1}{2z} \;\in\; \{1, i, -1, -i\}\,.$$

Autrement dit, l'équation proposée peut se récrire en

$$(z^2 - 2z + 1)(z^2 - 2iz + 1)(z^2 + 2z + 1)(z^2 + 2iz + 1) \;=\; 0\,.$$

On trouve les solutions suivantes:

$z^2 - 2z + 1 = 0$	1	1
$z^2 - 2iz + 1 = 0$	$i(1+\sqrt{2})$	$i(1-\sqrt{2})$
$z^2 + 2z + 1 = 0$	-1	-1
$z^2 + 2iz + 1 = 0$	$-i(1+\sqrt{2})$	$-i(1-\sqrt{2})$

Il y a donc deux racines doubles réelles et quatre racines (simples) complexes.

Question 2. Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{aligned}&ax + a^2y + a^3z = 0\,,\\&x + y + z = 0\,,\\&a^3x + a^2y + az = 0\,.\end{aligned}$$

Solution. Si $a = 0$, seule la deuxième équation subsiste et les solutions sont

$$x = \lambda,\ y = \mu,\ z = -\lambda - \mu\,,$$

où λ et μ sont des paramètres arbitraires.

Si $a \neq 0$, le système se récrit en

$$\begin{aligned}&x + ay + a^2z = 0\,,\\&x + y + z = 0\,,\\&a^2x + ay + z = 0\,.\end{aligned}$$

Son déterminant est

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-1 & a^2-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a-a^2 & 1-a^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a-1 & a^2-1 \\ a-a^2 & 1-a^2 \end{vmatrix} = -(a-1)^3(a+1)\,.$$

Si $a = 1$, on a les mêmes solutions que pour $a = 0$.

Si $a = -1$, le système se réduit à

$$\begin{aligned}&x - y + z = 0\,,\\&x + y + z = 0\,;\end{aligned}$$

les solutions sont

$$x = \lambda,\ y = 0,\ z = -\lambda\,,$$

où λ est un paramètre arbitraire.

Enfin, si $a \notin \{-1, 0, 1\}$, le système admet la solution unique

$$x = y = z = 0\,.$$

puisque dans ce cas son déterminant est non nul.

Question 3. Déterminer l'ensemble des valeurs (réelles) de a pour lesquelles l'énoncé

Pour tout réel x tel que $|x| < 1/2$, on a $ax^2 + (a+1)x + 1 \geq 0$

est vrai.

Solution. On observe d'abord que $ax^2 + (a+1)x + 1 \;=\; (x+1)(ax+1)\,.$
Dans l'intervalle $\{x : |x| < 1/2\}$, le premier facteur est toujours positif.
Dans le même intervalle, le second facteur est toujours positif si $-2 \leq a \leq 2$;
il est parfois négatif dans le cas contraire.
L'ensemble cherché est donc l'intervalle $\{a : |a| \leq 2\}$.

Juillet 2004

Question 1.

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^3 + 1 + i \ = \ 0\,.$$
On demande seulement les formes trigonométriques des racines.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$x^3 - 7x^2 - 28x + 160 \ = \ 0\,,$$
sachant qu'elle admet une racine négative ainsi que deux racines positives dont l'une est le double de l'autre.

Solution 1. La première équation peut s'écrire

$$z^3 = -1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})\,,$$

d'où on tire immédiatement l'ensemble des trois racines

$$\{\ \sqrt[6]{2}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})\,,\ \sqrt[6]{2}(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12})\,,\ \sqrt[6]{2}(\cos\frac{21\pi}{12} + i\sin\frac{21\pi}{12})\ \}\,.$$

(La troisième racine se récrit en $\sqrt[6]{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$.)

Soit $-a$ la racine négative et b et $2b$ les racines positives; les deux polynômes

$$x^3 - 7x^2 - 28x + 160 \qquad \text{et} \qquad (x+a)(x-b)(x-2b)$$

sont égaux. On a

$$(x+a)(x-b)(x-2b) \ = \ x^3 + (a-3b)x^2 + (2b^2 - 3ab)x + 2ab^2\,,$$

d'où

$$\begin{aligned} &a - 3b + 7 = 0\,,\\ &2b^2 - 3ab + 28 = 0\,,\\ &2ab^2 - 160 = 0\,. \end{aligned}$$

en remplaçant dans la seconde équation l'inconnue a par sa valeur tirée de la première équation, on obtient

$$2b^2 - 3(3b-7)b + 28 = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$-7b^2 + 21b + 28 = 0\,,$$

ou encore

$$b^2 - 3b - 4 = 0\,,$$

dont les racines sont $(3 \pm \sqrt{9+16})/2$, c'est-à-dire -1 et 4. La première racine $b = -1$ correspond à $a = 3b - 7 = -10$, ce qui ne convient pas; la troisième équation n'est pas vérifiée. La seconde racine $b = 4$ correspond à $a = 3b - 7 = 5$, ce qui convient; la troisième équation est vérifiée.
Les solutions de l'équation donnée au départ sont donc -5, 4 et 8.

Question 2.

- Démontrer la formule
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \;=\; \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 ,$$
où $n \in \mathbb{N}_0$.
On pourra éventuellement utiliser la méthode par récurrence.
- Calculer la somme des cubes des entiers multiples de 3 compris entre 32 et 62, en justifiant le résultat.

Solution 2. On démontre l'égalité proposée par récurrence. Pour $n = 1$ elle se réduit à
$$1^3 \;=\; \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 ,$$
ce qui est évident.[1]
Admettons que, pour un certain $n > 1$, l'égalité soit vraie pour $n-1$; on a
$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 \;=\; \left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2 ;$$
on en tire
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 \;&=\; \left[\tfrac{(n-1)n}{2}\right]^2 + n^3 ,\\ &\tfrac{(n-1)^2n^2+4n^3}{4} ,\\ &\tfrac{n^2[(n-1)^2+4n]}{4} ,\\ &\tfrac{n^2[n^2-2n+1+4n]}{4} ,\\ &\tfrac{n^2[n^2+2n+1]}{4} ,\\ &\tfrac{n^2(n+1)^2}{4} ,\\ &\left[\tfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 .\end{aligned}$$
Ceci montre que l'égalité reste vraie pour n, ce qui achève la démonstration.

La somme demandée est
$$\Sigma \;=\; 33^3 + 36^3 + \cdots + 60^3 ,$$
On peut mettre $3^3 = 27$ en évidence:
$$\Sigma \;=\; 27(11^3 + 12^3 + \cdots + 20^3) ,$$
ce qui, d'après la formule que nous venons de démontrer, vaut
$$\Sigma \;=\; 27\left(\left[\frac{20(20+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{10(10+1)}{2}\right]^2\right) ,$$
c'est-à-dire
$$\Sigma \;=\; 27(210^2 - 55^2) \;=\; 27 \times 41\,075 \;=\; 1\,109\,025 .$$

[1] L'égalité est aussi valable pour $n = 0$ puisque la somme d'un ensemble vide de termes vaut 0.

Question 3. Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{aligned} (a^2+a)x + (a^2-1)y + (a+1)^2 z &= 2a^2\,, \\ x + (1-a)y + (1+a)z &= 1-4a\,, \\ (1-a)x + 2(1-a)y &= 6-6a\,. \end{aligned}$$

Solution 3.
On observe d'abord que le premier membre de la première équation est divisible par $a+1$, tandis que les deux membres de la dernière équation sont divisibles par $a-1$; cela nous incite à considérer d'abord les cas particuliers où ces diviseurs s'annulent.

Si $a=-1$, la première équation se réduit à $0=2$ et le système n'admet aucune solution.

Si $a=1$, la troisième équation se réduit à $0=0$; les deux équations restantes se réduisent à

$$\begin{aligned} 2x+4z &= 2\,, \\ x+2z &= -3\,. \end{aligned}$$

Les deux équations sont incompatibles et le système n'admet de nouveau aucune solution.

Si a est distinct de 1 et de -1, le système se récrit en

$$\begin{aligned} ax + (a-1)y + (a+1)z &= 2a^2/(a+1)\,, \\ x + (1-a)y + (1+a)z &= 1-4a\,, \\ x + 2y &= 6\,. \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système vaut

$$\begin{vmatrix} a & a-1 & a+1 \\ 1 & 1-a & 1+a \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -a-1 & a+1 \\ 1 & -1-a & 1+a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(a+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Cela nous incite à chercher une simplification supplémentaire, aisément découverte : en soustrayant la seconde équation de la première, on obtient

$$(a-1)x + 2(a-1)y = [2a^2 - (1-4a)(a+1)]/(a+1)\,,$$

c'est-à-dire

$$(a-1)x + 2(a-1)y = [6a^2+3a-1]/(a+1)\,,$$

ou encore

$$x + 2y = [6a^2+3a-1]/(a^2-1)$$

Vu la troisième équation, il ne peut y avoir de solution que si

$$6a^2+3a-1 = 6(a^2-1)\,,$$

c'est-à-dire si $3a-1=-6$, donc si $a=-5/3$. Dans ce cas, le système devient

$$\begin{aligned} 5x+8y+2z &= 25\,, \\ 3x+8y-2z &= 23\,, \\ x+2y &= 6\,. \end{aligned}$$

Si λ est un paramètre réel quelconque, toute solution peut s'écrire

$$(x,\,y,\,z) = (6-2\lambda,\,\lambda,\,\lambda-5/2)\,.$$

Septembre 2004

Question 1.

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$4z^3 + 4z + \frac{1}{z} \;=\; 0\,.$$
On donnera la forme algébrique et la forme trigonométrique de chaque racine.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$4x^3 - 6x^2 - 12x + 9 \;=\; 0\,,$$
sachant qu'elle admet une racine négative, ainsi que deux racines positives dont le quotient est $2 + \sqrt{3}$.

Solution 1.

La première équation peut s'écrire
$$\frac{1}{z}(2z^2 + 1)^2 \;=\; 0\,.$$
Le premier facteur ne s'annule jamais; le second s'annule si et seulement si $z^2 = -1/2$. L'équation initiale admet donc deux racines doubles qui sont $i\sqrt{2}/2$ et $-i\sqrt{2}/2$; les formes trigonométriques sont
$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2})\,.$$

Soit $-a$ la racine négative et b et $(2+\sqrt{3})b$ les racines positives; les deux polynômes
$$4x^3 - 6x^2 - 12x + 9 \qquad \text{et} \qquad 4(x+a)(x-b)(x-(2+\sqrt{3})b)$$
sont égaux. On a
$$4(x+a)(x-b)(x-(2+\sqrt{3})b) \;=$$
$$4x^3 + 4[a - (3+\sqrt{3})b]x^2 + 4[(2+\sqrt{3})b^2 - (3+\sqrt{3})ab]x + 4(2+\sqrt{3})ab^2\,,$$
d'où
$$\begin{aligned} &a - (3+\sqrt{3})b + 3/2 = 0\,,\\ &(2+\sqrt{3})b^2 - (3+\sqrt{3})ab + 3 = 0\,,\\ &4(2+\sqrt{3})ab^2 - 9 = 0\,. \end{aligned}$$
en remplaçant dans la seconde équation l'inconnue a par sa valeur tirée de la première équation, on obtient
$$(2+\sqrt{3})b^2 - (3+\sqrt{3})[(3+\sqrt{3})b - 3/2]b + 3 = 0\,,$$
c'est-à-dire
$$2[(2+\sqrt{3}) - (3+\sqrt{3})^2]b^2 + 3(3+\sqrt{3})b + 6 = 0\,,$$

ou encore

$$(-20-10\sqrt{3})b^2+(9+3\sqrt{3})b+6=0\,.$$

Le réalisant de cette équation vaut

$$(9+3\sqrt{3})^2+48(10+5\sqrt{3})=588+294\sqrt{3}=49(12+6\sqrt{3})\,.$$

En posant $12+6\sqrt{3}=(\sqrt{u}+\sqrt{v})^2$, on trouve $u+v=12$ et $uv=27$, d'où $\{u,v\}=\{9,3\}$; le réalisant est donc $7^2(3+\sqrt{3})^2$ et les racines de l'équation d'inconnue b sont donc

$$b_\pm \;=\; \frac{9+3\sqrt{3}\pm 7(3+\sqrt{3})}{40+20\sqrt{3}}\,.$$

La racine b_- est négative, ce qui ne convient pas. La racine $b_+=(3+\sqrt{3})/(4+2\sqrt{3})=(3-\sqrt{3})/2$ convient; on en déduit $a=(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})/2-3/2=6/2-3/2=3/2$.
Les solutions de l'équation donnée au départ sont donc $-3/2$, $(3+\sqrt{3})/2$ et $(3-\sqrt{3})/2$.

Question 2.

- Construire un polynôme du troisième degré P_1 tel que

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+1) \;=\; P_1(n)\,,$$

  pour tout entier naturel n.
  Justifier le résultat proposé, par exemple par la méthode de récurrence.

- Généralisation: pour quelles valeurs de k existe-t-il un polynôme du troisième degré P_k tel que

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+k) \;=\; P_k(n)\,,$$

  pour tout entier naturel n? Justifier la réponse.

Solution 2.
On traite directement le cas général. Supposons vraie l'égalité

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+k) \;=\; a_k n^3 + b_k n^2 + c_k n + d_k\,.$$

Les cas $n = 0, 1, 2, 3$ imposent respectivement

$$\begin{aligned}
0 &= d_k\,,\\
1(1+k) &= a_k + b_k + c_k + d_k\,,\\
1(1+k) + 2(2+k) &= 8a_k + 4b_k + 2c_k + d_k\,,\\
1(1+k) + 2(2+k) + 3(3+k) &= 27a_k + 9b_k + 3c_k + d_k\,.
\end{aligned}$$

Le système se récrit en

$$\begin{aligned}
d_k &= 0\,,\\
a_k + b_k + c_k &= 1+k\,,\\
8a_k + 4b_k + 2c_k &= 5+3k\,,\\
27a_k + 9b_k + 3c_k &= 14+6k\,.
\end{aligned}$$

L'unique solution est

$$a_k = \frac{1}{3}\,,\; b_k = \frac{1+k}{2}\,,\; c_k = \frac{1+3k}{6}\,,\; d_k = 0.$$

On démontre par récurrence sur n que l'égalité

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+k) \;=\; \frac{1}{3}n^3 + \frac{1+k}{2}n^2 + \frac{1+3k}{6}n$$

est valable pour tout entier naturel n, quel que soit le nombre k (même complexe). On a déjà traité le cas de base. Supposons l'égalité vraie pour un certain n. On doit montrer qu'elle reste vraie pour $n+1$, ce qui revient à montrer l'égalité des expressions

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1+k}{2}n^2 + \frac{1+3k}{6}n \;+\; (n+1)(n+1+k)$$

et

$$\frac{1}{3}(n+1)^3 + \frac{1+k}{2}(n+1)^2 + \frac{1+3k}{6}(n+1)\,.$$

On vérifie par développement direct que la valeur commune des deux expressions est

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1+k}{2}n^2 + \frac{1+3k}{6}n + n^2 + (2+k)n + 1 + k\,.$$

Question 3.

Démontrer que pour tout entier naturel m on a

$$\mathsf{C}_{2m+1}^{m} \;=\; \mathsf{C}_{2m}^{m} + \mathsf{C}_{2m-1}^{m-1} + \cdots + \mathsf{C}_{m}^{0}\,.$$

Solution 3.

L'égalité demandée est visiblement un cas particulier de l'égalité

$$\mathsf{C}_{n+1}^{p} \;=\; \mathsf{C}_{n}^{p} + \mathsf{C}_{n-1}^{p-1} + \cdots + \mathsf{C}_{n-p}^{0}\,,$$

valable pour tous entiers n et p tels que $0 \le p \le n$.
Cette égalité peut s'établir en itérant la relation bien connue

$$\mathsf{C}_{n+1}^{p} \;=\; \mathsf{C}_{n}^{p} + \mathsf{C}_{n}^{p-1}\,,$$

valable si $0 < p \le n$. On a successivement

$$\begin{aligned}
\mathsf{C}_{n+1}^{p} &= \mathsf{C}_{n}^{p} + \mathsf{C}_{n}^{p-1}\,,\\
&= \mathsf{C}_{n}^{p} + \mathsf{C}_{n-1}^{p-1} + \mathsf{C}_{n-1}^{p-2}\,,\\
&= \mathsf{C}_{n}^{p} + \mathsf{C}_{n-1}^{p-1} + \mathsf{C}_{n-2}^{p-2} + \mathsf{C}_{n-2}^{p-3}\,,\\
&= \;\vdots\\
&= \mathsf{C}_{n}^{p} + \mathsf{C}_{n-1}^{p-1} + \cdots + \mathsf{C}_{n-p+1}^{1} + \mathsf{C}_{n-p+1}^{0}\,,\\
&= \mathsf{C}_{n}^{p} + \mathsf{C}_{n-1}^{p-1} + \cdots + \mathsf{C}_{n-p+1}^{1} + \mathsf{C}_{n-p}^{0}\,.
\end{aligned}$$

On peut aussi procéder par raisonnement direct. Supposons que l'on choisisse un sous-ensemble de p nombres dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$. Cela peut se faire de C_{n+1}^{p} manières. Le plus grand des éléments négligés est nécessairement compris entre $n-p$ et n. Si cet élément est $n-i$, le sous-ensemble comporte obligatoirement les i nombres $n-i+1, \ldots, n$ ainsi $p-i$ autres nombres appartenant à l'ensemble $\{0, \ldots, n-i-1\}$; le choix de ces derniers peut s'opérer de C_{n-i}^{p-i} manières, d'où on tire

$$\mathsf{C}_{n+1}^{p} \;=\; \sum_{i=0}^{p} \mathsf{C}_{n-i}^{p-i}\,,$$

c'est-à-dire le résultat attendu.
Remarque. On peut utiliser ce raisonnement pour établir directement l'énoncé, sans passer par sa généralisation.

Juillet 2005

Question 1.

- Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{aligned} &a^2x + y - az = 1\,, \\ &x - ay + a^2z = -a\,, \\ &-ax + a^2y + z = a^2\,. \end{aligned} \tag{1}$$

- Ce système admet-il une solution (x, y, z) satisfaisant les conditions additionnelles:

$$\begin{aligned} &xy + yz + zx = -4\,, \\ &xyz = -4\,. \end{aligned} \tag{2}$$

  On justifiera la réponse.

Solution. Soient E_1, E_2 et E_3 les équations du système (1). Il est intéressant de considérer le système dérivé composé des équations $E_1 + aE_3$, $E_2 + aE_1$, $E_3 + aE_2$, c'est-à-dire le système

$$\begin{aligned} &(a^3 + 1)y = a^3 + 1\,, \\ &(a^3 + 1)x = 0\,, \\ &(a^3 + 1)z = 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Toute solution du système initial (1) est aussi une solution du système dérivé (3), la réciproque n'étant pas nécessairement vraie.
Si $a \neq -1$, l'unique solution du système dérivé (3) est

$$(x, y, z) = (0, 1, 0)\,;$$

on vérifie par remplacement direct que c'est aussi une solution — nécessairement la seule — du système initial (1). Cette solution ne vérifie pas les conditions additionnelles (2).

Si $a = -1$, les trois équations du système initial (1) se réduisent à $x + y + z = 1$ et les solutions du système forment l'ensemble

$$\{(\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\,.$$

Dans ce cas, il est possible de satisfaire les conditions additionnelles, en résolvant

$$\begin{aligned} &x + y + z = 1\,, \\ &xy + yz + zx = -4\,, \\ &xyz = -4\,. \end{aligned}$$

Les solutions sont les racines de l'équation[2]

$$u^3 - u^2 - 4u + 4 = 0\,,$$

qui se récrit en

$$u^2(u - 1) - 4(u - 1) = 0\,,$$

[2] *Rappel.* Les racines x, y et z de l'équation $u^3 + au^2 + bu + c = 0$ sont exactement les racines du système composé des trois équations $x + y + z = -a$, $xy + yz + zx = b$ et $xyz = -c$.

et encore en

$$(u-1)(u+2)(u-2)=0\,,$$

Donc, si $a=-1$, le systèmes initial admet six solutions vérifiant aussi les conditions additionnelles, c'est-à-dire

$$(-2,1,2),\ (-2,2,1),\ (1,-2,2),\ (1,2,-2),\ (2,-2,1),\ (2,1,-2)\,.$$

Remarque. On peut naturellement traiter le système initial sans considérer le système dérivé. La règle de Cramer permet d'évaluer son déterminant:

$$-a^3-a^3-a^3+a^3-1-a^6 \;=\; -(a^6+2a^3+1) \;=\; -(a^3+1)^2\,,$$

qui s'annule si et seulement si $a=-1$.

Question 2.

En évaluant de deux manières différentes une puissance de $(1+i)$, démontrer que

$$\sum_{k=0}^{2m} \mathsf{C}_{4m}^{2k}(-1)^{m+k} \;=\; 4^m\,.$$

En déduire que

$$2\left(1-\mathsf{C}_{40}^{2}+\mathsf{C}_{40}^{4}-\mathsf{C}_{40}^{6}+\cdots-\mathsf{C}_{40}^{18}\right) \;=\; 2^{20}-\mathsf{C}_{40}^{20}\,.$$

Solution. On a d'une part

$$(1+i)^{4m} \;=\; \sum_{\ell=0}^{4m} \mathsf{C}_{4m}^{\ell} i^{\ell}\,,$$

et d'autre part

$$(1+i)^{4m} \;=\; \sqrt{2}^{4m}(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)^{4m} \;=\; 4^m(\cos m\pi+i\sin m\pi) \;=\; (-1)^m 4^m\,.$$

Dans la première expression, les termes d'indice pair sont réels, ceux d'indice impair sont imaginaires; la somme de ces derniers est nulle et on peut les négliger. En égalant les deux expressions, on obtient

$$\sum_{\substack{\ell=0\\ \ell \text{ pair}}}^{4m} \mathsf{C}_{4m}^{\ell} i^{\ell} \;=\; \sum_{k=0}^{2m} \mathsf{C}_{4m}^{2k}(-1)^k \;=\; (-1)^m 4^m\,,$$

ou encore, en multipliant par $(-1)^m$,

$$\sum_{k=0}^{2m} \mathsf{C}_{4m}^{2k}(-1)^{m+k} \;=\; 4^m\,;$$

cela se récrit en

$$\left(\sum_{k=0}^{m-1}\left[\mathsf{C}_{4m}^{2k}(-1)^{m+k}+\mathsf{C}_{4m}^{2(2m-k)}(-1)^{m+(2m-k)}\right]\right)+\mathsf{C}_{4m}^{2m}(-1)^{2m} \;=\; 4^m\,.$$

En utilisant la relation bien connue $\mathsf{C}_n^p = \mathsf{C}_n^{n-p}$ et l'égalité $(-1)^{m+k} = (-1)^{m+2m-k}$, cela se transforme en

$$\left(\sum_{k=0}^{m-1} 2\mathsf{C}_{4m}^{2k}(-1)^{m+k}\right) + \mathsf{C}_{4m}^{2m} \;=\; 4^m \;=\; 2^{2m}\,.$$

En posant $m = 10$ on obtient

$$2\left(1 - \mathsf{C}_{40}^{2} + \mathsf{C}_{40}^{4} - \mathsf{C}_{40}^{6} + \cdots - \mathsf{C}_{40}^{18}\right) + \mathsf{C}_{40}^{20} \;=\; 2^{20}\,,$$

qui équivaut à l'égalité recherchée.

Question 3.

Résoudre l'inéquation

$$\frac{x + \sqrt{3x+10}}{x - \sqrt{3x+10}} \;\leq\; \frac{x+1}{x-1}\,.$$

Solution. L'inéquation est définie si $3x + 10 \geq 0$, $x \neq \sqrt{3x+10}$ et $x \neq 1$. Son domaine est donc

$$\{x :\; x \geq -10/3 \;\wedge\; x \neq 1 \;\wedge\; x \neq 5\}\,.$$

L'équation associée est

$$(x + \sqrt{3x+10})(x-1) \;=\; (x - \sqrt{3x+10})(x+1)\,.$$

Elle se simplifie en

$$x\sqrt{3x+10} - x \;=\; -x\sqrt{3x+10} + x\,,$$

ou encore en

$$x(\sqrt{3x+10} - 1) \;=\; 0\,,$$

dont les racines sont 0 et -3. Les point importants sont, dans l'ordre croissant,

$$-10/3, -3, 0, 1, 5\,.$$

L'inéquation n'est pas vérifiée entre $-10/3$ et -3, elle est vérifiée entre -3 et 0, non vérifiée entre 0 et 1, vérifiée entre 1 et 5 et non vérifiée au-delà de 5.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est la réunion des intervalles $[-3 : 0]$ et $]1 : 5[$.

Septembre 2005

Question 1. Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{a-1}{x} & + & \dfrac{a}{y} & + & \dfrac{1}{z} & = & a\,, \\ \dfrac{a-2}{x} & + & \dfrac{a-1}{y} & + & \dfrac{1}{z} & = & 1-a\,, \\ \dfrac{1}{x} & + & \dfrac{1}{y} & - & \dfrac{a-1}{z} & = & 1\,. \end{array}$$

Suggestion: Poser $\frac{1}{x} = X$, $\frac{1}{y} = Y$, $\frac{1}{z} = Z$,

Solution. En utilisant la suggestion, on obtient le système

$$\begin{aligned} &(a-1)X + aY + Z = a\,, \\ &(a-2)X + (a-1)Y + Z = 1-a\,, \\ &X + Y - (a-1)Z = 1\,. \end{aligned}$$

En soustrayant les deux dernières équations de la première, on obtient $(a-1)Z = 2(a-1)$, ce qui incite à traiter séparément le cas $a = 1$, qui se réduit à

$$\begin{aligned} &Y + Z = 1\,, \\ &-X + Z = 0\,, \\ &X + Y = 1 \end{aligned}$$

et admet pour solution le triplet $\{X = \lambda\,, Y = 1-\lambda\,, Z = \lambda\}$, λ étant quelconque.
Si $a \neq 0$, on a $Z = 2$ et $X + Y = 2a - 1$, d'où on tire $X = 2a^2 - 2a + 2$ et $Y = -2a^2 + 4a - 3$, et donc le triplet $\{X = 2a^2 - 2a + 2\,, Y = -2a^2 + 4a - 3\,, Z = 2\}$.

On revient au système initial. Si $a = 1$, le triplet solution est $\{x = 1/\lambda\,, y = 1/(1-\lambda)\,, z = 1/\lambda\}$, λ étant distinct de 0 et de 1.
Si $a \neq 1$, le triplet solution est $\{x = 1/(2a^2-2a+2)\,, y = 1/(-2a^2+4a-3)\,, z = 1/2\}$. Aucune restriction sur le réel a n'est nécessaire, puisque les dénominateurs, respectivement égaux à $a^2 + 1 + (a-1)^2$ et $-(1 + 2(a-1)^2)$ ne s'annulent jamais.

Question 2. Pour quels $a \in \mathbb{R}$ a-t-on

$$\text{Si } 0 \leq x \leq 1 \text{ alors } ax^2 + (a+1)x - 1 \leq 0 \text{ ?}$$

Nous donnons deux moyens pour déterminer l'ensemble S des valeurs de a pour lesquelles l'inégalité $ax^2 + (a+1)x - 1 \leq 0$ est vraie quel que soit $x \in [0:1]$.

Première solution. On distingue deux cas:

1. $a > 0$: la propriété est fausse car pour $x = 1$ le trinôme $ax^2 + (a+1)x - 1$ vaut $2a$, qui est strictement positif;
2. $a \leq 0$: la propriété est vraie car, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0:1]$, on a $ax^2 \leq 0$ et $(a+1)x \leq x \leq 1$, d'où $ax^2 + (a+1)x \leq 1$.

On a donc $S =]-\infty : 0]$.

Deuxième solution. On observe d'abord que l'inégalité $ax^2 + (a+1)x - 1 \leq 0$ est toujours vérifiée en $x = 0$. On note ensuite que, sur l'intervalle semi-ouvert $]0:1]$, l'inégalité peut se récrire en

$$a \leq \frac{1-x}{x^2+x}\,.$$

Sur le même intervalle, le second membre est une fonction continue; le numérateur et le dénominateur sont positifs, le numérateur est décroissant et le dénominateur croissant, donc la fonction est décroissante et atteint son minimum 0 pour $x = 1$. L'ensemble S est donc $]-\infty : 0]$.

Question 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 - 9z^3 + 33z^2 - 54z + 36 = 0\,,$$

sachant qu'aucune racine n'est réelle et que l'une est double d'une autre.

Solution. Une équation à coefficients réels n'admettant aucune racine réelle est nécessairement de degré pair, soit $2n$, et admet n paires de racines complexes conjuguées. Dans le cas présent, il doit donc exister un réel a et un réel strictement positif b tels que les racines soient

$$a + bi\,,\ a - bi\,,\ 2(a+bi)\,,\ 2(a-bi)\,.$$

L'équation peut donc se récrire

$$(z^2 - 2az + [a^2+b^2])(z^2 - 4az + 4[a^2+b^2]) = 0\,.$$

En identifiant les termes du troisième degré, on trouve $a = 3/2$; en identifiant les termes indépendants, on trouve $4(a^2+b^2)^2 = 36$, d'où $a^2 + b^2 = 3$ et $b = \sqrt{3}/2$.
A titre de vérification, on remultiplie les trinômes; on a bien

$$(z^2 - 3z + 3)(z^2 - 6z + 12) = z^4 - 9z^3 + 33z^2 - 54z + 36\,.$$

Juillet 2006

Question 1.

Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{cases} (I) & x - y + z = 1 - a\,, \\ (II) & x + y + az = 0\,, \\ (III) & ax + y + z = a - 1\,. \end{cases}$$

Solution.

On transforme le système successivement en

$$\begin{cases} (I) & x - y + z = 1 - a\,, \\ (II - I) & 2y + (a-1)z = a - 1\,, \\ (III - aI) & (a+1)y + (1-a)z = a^2 - 1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} (I') & x - y + z = 1 - a\,, \\ (II') & 2y + (a-1)z = a - 1\,, \\ (2III' - (a+1)II') & (3+a)(1-a)z = a^2 - 1\,. \end{cases}$$

Remarques. Les trois systèmes sont équivalents.[3] Le déterminant du système initial vaut $\Delta = 3 - 2a - a^2$ $= (1-a)(3+a)$; le déterminant du système final vaut 2Δ.

- Si $a = 1$, le système (transformé) se réduit aux deux équations $x - y + z = 0$ et $2y = 0$. L'ensemble des triplets solutions est $\{(\lambda, 0, -\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Si $a = -3$, le système se réduit à $x - y + z = 4$, $2y - 4z = -4$ et $0 = 8$ et est visiblement sans solution.
- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$, le système admet la solution unique

$$z = -\frac{1+a}{3+a}\,, \quad y = \frac{(a-1)(1-z)}{2} = \frac{(a-1)(2+a)}{3+a}\,, \quad x = 1 - a + y - z = \frac{2}{3+a}\,.$$

[3] Si dans un système composé des équations $E_1, \ldots, E_n$ on remplace une équation E_i par une combinaison linéaire $a_1E_1 + \cdots + a_nE_n$, le systéme obtenu est équivalent au système initial si le coefficient a_i n'est pas nul. Si le déterminant de l'ancien système est Δ, celui du nouveau est $a_i\Delta$.

Question 2.

- Trouver tous les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$(z + 2\cos\alpha)^2 \;=\; \frac{1}{z^2}\,.$$

- Trouver tous les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$(z + 2\cos\alpha)^4 \;=\; \frac{1}{z^4}\,.$$

Remarque préliminaire. Si r est un réel positif, les solutions de l'équation $z^2 = r$ sont $\sqrt{r}$ et $-\sqrt{r}$. Cependant, si a et b sont des réels quelconques, affirmer que les solutions de l'équation $z^2 = a + bi$ sont $\sqrt{a+bi}$ et $-\sqrt{a+bi}$ est abusif. D'une part, la signification même de $\sqrt{a+bi}$ n'est pas claire; par exemple, la valeur de $\sqrt{-2i}$ serait-elle $1-i$ ou $i-1$? Il n'y a pas de convention générale à ce sujet. De plus, un nombre complexe n'est parfaitement explicité que si on en donne la partie réelle et la partie imaginaire, ou éventuellement son module et son argument. Rappelons donc que, si on pose $\rho = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$, les solutions de l'équation $z^2 = a + bi$ sont

$$\sqrt{\frac{\rho+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\rho-a}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{\rho+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\rho-a}{2}}$$

si $b > 0$ et

$$\sqrt{\frac{\rho+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\rho-a}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{\rho+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\rho-a}{2}}$$

si $b < 0$. L'écriture incorrecte $z = \pm\sqrt{-2i}$ doit être évitée au profit de $z \in \{1-i, i-1\}$ ou $z = \pm(1-i)$. D'une manière générale, l'écriture $\sqrt{z}$ est à réserver au cas où le radicand r est un réel positif.

Solution.

En observant que les racines carrées de l'unité sont -1 et 1, et que les racines quatrièmes sont -1, 1, $-i$ et i, les deux équations peuvent se récrire en

$$z(z+2\cos\alpha) \in \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad z(z+2\cos\alpha) \in \{-1, 1, -i, i\}\,.$$

Il s'agit donc de résoudre quatre équations du second degré.
Les solutions de l'équation $z(z+2\cos\alpha) = k$ sont $-\cos\alpha \pm u$, avec $u^2 = \cos^2\alpha + k$, étant entendu que la remarque préliminaire s'applique quand le radicand n'est pas un réel positif.
En tenant compte de l'égalité $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$, on a le tableau suivant:

équation	racines
$z(z+2\cos\alpha) = 1$	$-\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha + 1}$
$z(z+2\cos\alpha) = -1$	$-\cos\alpha \pm i\sin\alpha$
$z(z+2\cos\alpha) = i$	$-\cos\alpha \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^4\alpha+1}+\cos^2\alpha}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^4\alpha+1}-\cos^2\alpha}{2}}\right)$
$z(z+2\cos\alpha) = -i$	$-\cos\alpha \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^4\alpha+1}+\cos^2\alpha}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^4\alpha+1}-\cos^2\alpha}{2}}\right)$

Les racines des deux premières équations du tableau sont les quatre solutions de la première équation de l'énoncé; les racines des quatre équations du tableau sont les huit solutions de la seconde équation de l'énoncé.

Question 3.

- Trouver des nombres A, B et C, tels que

$$\frac{1}{(x-1)x(x+1)} \;=\; \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}\,.$$

- Ces nombres sont-ils uniques? On justifiera la réponse.
- Déduire de ce qui précède la valeur de

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{(k-1).k.(k+1)}$$

pour $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

Solution.
L'égalité de l'énoncé se récrit en

$$\frac{1}{(x-1)x(x+1)} \;=\; \frac{Ax(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x-1)x}{(x-1)x(x+1)} \;=\; \frac{(A+B+C)x^2+(A-C)x-B}{(x-1)x(x+1)}\,.$$

On voit donc que les nombres A, B et C sont convenables si et seulement si, pour tout x,[4] on a $1=(A+B+C)x^2+(A-C)x-B$. Cette condition équivaut à l'identité des polynômes P et Q avec

$$P(x) \;=_{def}\; 1 \quad \text{et} \quad Q(x) \;=_{def}\; (A+B+C)x^2+(A-C)x-B\,,$$

ou encore au fait que les nombres A, B et C sont solutions du système

$$\begin{cases} A+B+C=0\,, \\ A-C=0\,, \\ -B=1\,. \end{cases}$$

Ces nombres sont donc uniques, puisque ce système admet une et une seule solution:

$$A=1/2\,,\; B=-1\,,\; C=1/2\,.$$

On en déduit:

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{(k-1).k.(k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{k-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right).$$

En tenant compte des simplifications, on obtient:

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{(k-1).k.(k+1)} \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)\,,$$

ce qui se réduit à:

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{(k-1).k.(k+1)} \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)\,.$$

[4] n'annulant pas le dénominateur.

Septembre 2006

Question 1.

Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{cases} (I) & x + ay - (a-2)z = 1\,, \\ (II) & ax + a^2y - 3z = a\,, \\ (III) & (a-1)x + 6y + (a-5)z = 2\,. \end{cases}$$

Solution.

Un système équivalent est obtenu en remplaçant II par $II - I - III$ et III par $III - (a-1)I$; il s'écrit

$$\begin{cases} x + ay - (a-2)z = 1\,, \\ (a^2 - a - 6)y = a - 3\,, \\ [6 - (a-1)a]y + [(a-5) + (a-1)(a-2)]z = 3 - a \end{cases}$$

et se simplifie en

$$\begin{cases} x + ay - (a-2)z = 1\,, \\ (a-3)(a+2)y = a - 3\,, \\ (3-a)(2+a)y + (a-3)(a+1)z = 3 - a \end{cases}$$

Remarque. Ces systèmes ont le même déterminant, à savoir

$$(a-3)^2(a+1)(a+2)\,.$$

- Dans le cas où $a = 3$, le système (transformé) se réduit aux équations

  $$x + 3y - z = 1\,,\ 0 = 0\,,\ 0 = 0\,.$$

  L'ensemble des triplets-solutions est

  $$\{(\lambda, \mu, \lambda + 3\mu - 1) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\,.$$

- Dans le cas où $a = -1$, le système se réduit à

  $$x - y + 3z = 1\,,\ y = 1\,,\ y = 1\,.$$

  L'ensemble des triplets-solutions est

  $$\{(2 - 3\lambda, 1, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

- Dans le cas où $a = -2$, le système se réduit à

  $$x - 2y + 4z = 1\,,\ 0 = -5\,,\ \cdots$$

  et n'admet pas de solution.

- Dans les autres cas, c'est-à-dire ceux où $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 3\}$, le système devient

  $$\begin{cases} x + ay - (a-2)z = 1\,, \\ (a+2)y = 1\,, \\ (2+a)y - (a+1)z = 1 \end{cases}$$

  et son unique solution est

  $$y = \frac{1}{a+2}\,,\ z = \frac{(2+a)y - 1}{a+1} = \frac{(2+a) - (a+2)}{(a+1)(a+2)} = 0\,,\ x = 1 - ay = \frac{a+2-a}{a+2} = \frac{2}{a+2}\,.$$

Question 2.

Dans $\mathbb{R}$, résoudre l'inéquation:

$$\frac{1}{1+\sqrt{|x-1|}} < x\,.$$

Solution.

Le membre de gauche étant strictement positif, celui de droite doit l'être aussi et on a $x > 0$. Dans $\mathbb{R}_0^+$, on peut récrire l'inéquation en

$$\sqrt{|x-1|} > \frac{1}{x} - 1\,.$$

Si $x > 1$, le second membre est strictement négatif et l'inéquation est vérifiée.
Si $x = 1$, l'inégalité se réduit à $0 > 0$ et n'est pas vérifiée.
Si $0 < x < 1$, elle se récrit successivement en

$$|x-1| > \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2\;;$$

$$1 - x > \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2\;;$$

$$-x > \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\,;$$

$$x < -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\,;$$

$$x^3 < -1 + 2x\,;$$

$$x^3 - 2x + 1 < 0\,;$$

$$(x-1)(x^2+x-1) < 0\,;$$

$$x^2 + x - 1 > 0\,.$$

Les racines du trinôme sont $(-1 \pm \sqrt{5})/2$ et l'inégalité est vérifiée à l'extérieur des racines.
En conclusion, l'ensemble des solutions est $]\frac{-1+\sqrt{5}}{2} : 1[\ \cup\ ]1 : +\infty[$.

Question 3.

- Démontrer l'égalité suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathsf{C}_n^1 + 2\mathsf{C}_n^2 + \cdots + k\mathsf{C}_n^k + \cdots + n\mathsf{C}_n^n = n2^{n-1}\,;$$

- En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathsf{C}_n^2 + \cdots + (k-1)\mathsf{C}_n^k + \cdots + (n-1)\mathsf{C}_n^n = (n-2)2^{n-1} + 1\,.$$

Remarques. On peut répondre au second point même si on n'a pas répondu au premier.
Rappelons qu'une somme de m termes est nulle quand $m = 0$.
Enfin, notons E_n l'égalité classique ci-dessous.

$$\mathsf{C}_n^0 + \mathsf{C}_n^1 + \cdots + \mathsf{C}_n^k + \cdots + \mathsf{C}_n^n = 2^n\,.$$

Solution.

- De l'égalité bien connue

$$\mathsf{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,,$$

on tire immediatement

$$k\mathsf{C}_n^k = n\mathsf{C}_{n-1}^{k-1}\,,$$

valable si $0 < k \leq n$. L'égalité à démontrer se récrit en

$$n\mathsf{C}_{n-1}^0 + n\mathsf{C}_{n-1}^1 + \cdots + n\mathsf{C}_{n-1}^k + \cdots + n\mathsf{C}_{n-1}^{n-1} = n2^{n-1}\,,$$

En divisant les deux membres par n, cett égalité se ramène à l'égalité classique E_{n-1}.

$$\mathsf{C}_{n-1}^0 + \mathsf{C}_{n-1}^1 + \cdots + \mathsf{C}_{n-1}^k + \cdots + \mathsf{C}_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}\,.$$

- En soustrayant de la première égalité proposée (et maintenant démontrée), l'égalité classique E_n, puis en ajoutant 1 aux deux membres du résultat, on obtient la seconde égalité proposée, ce qui démontre celle-ci.

Juillet 2007

Question 1. Résoudre le système suivant, pour toute valeur du paramètre réel a:

$$\begin{cases} ax + a^2y + z = a \\ x + a^2y + az = a \\ (a+1)x + 8y + (a+1)z = 4 \end{cases}$$

Solution. En soustrayant les deux premières équations de la troisième, on obtient $(8-2a^2)y = 4-2a$ ou encore $(2-a)(2+a)y = 2-a$, ce qui suggère d'isoler les cas particuliers $a=2$ et $a=-2$.

Si $a=-2$, on obtient $0y=4$; le système est alors impossible.

Si $a=2$, la troisième équation est redondante et le système se réduit à

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 2 \\ x + 4y + 2z = 2 \end{cases} \qquad \text{puis à} \qquad \begin{cases} 2x + 4y + z = 2 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

d'où on tire $x=\lambda$, $y=(2-3\lambda)/4\,, z=\lambda$, où λ est un paramètre quelconque.

Si $a \notin \{-2,2\}$, on reporte $y = 1/(2+a)$ dans les deux premières équations et on obtient

$$\begin{cases} a(2+a)x + a^2 + (2+a)z = a(2+a) \\ (2+a)x + a^2 + a(2+a)z = a(2+a) \end{cases} \qquad \text{qui se réduit à} \qquad \begin{cases} a(2+a)x + (2+a)z = 2a \\ (2+a)x + a(2+a)z = 2a \end{cases}$$

Le déterminant de ce système s'annule pour $a \in \{-1,1\}$.

Si $a=-1$, le système est impossible.

Si $a=1$, le système est indéterminé et les deux équations se réduisent à $3x+3z=2$; les solutions du système initial sont $x=\lambda$, $y=1/3$, $z=(2-3\lambda)/3$, où λ est un paramètre quelconque.

Enfin, si $a \notin \{-2,-1,1,2\}$, le système admet une solution unique

$$x = \frac{2a}{(1+a)(2+a)}\,,\ y = \frac{1}{2+a}\,,\ z = \frac{2a}{(1+a)(2+a)}\,.$$

Question 2. Soit n un entier naturel.

a. En utilisant la formule de DE MOIVRE et celle du binôme de NEWTON, donner deux expressions différentes de
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

b. En déduire la formule suivante:
$$\tan(n\theta) = \tan\theta \cdot \frac{n - \mathsf{C}_n^3 \tan^2\theta + \mathsf{C}_n^5 \tan^4\theta - \cdots}{1 - \mathsf{C}_n^2 \tan^2\theta + \mathsf{C}_n^4 \tan^4\theta - \cdots}$$

c. En déduire que les racines du polynôme
$$p(x) = x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7$$
sont les réels $-\tan(\frac{\pi}{7})$, $\tan(\frac{\pi}{7})$, $-\tan(\frac{2\pi}{7})$, $\tan(\frac{2\pi}{7})$, $-\tan(\frac{3\pi}{7})$ et $\tan(\frac{3\pi}{7})$.

d. En conclure que si α est une racine du polynôme $p(x)$ dont il en question au point précédent, alors $\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ est également une racine de $p(x)$.

Solution. Les deux expressions différentes de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ sont, d'une part, $\cos n\theta + i\sin n\theta$ et, d'autre part,
$$\cos^n\theta + i\,n\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \mathsf{C}_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta - i\mathsf{C}_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \mathsf{C}_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta + i\cdots$$

En séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient
$$\cos n\theta \;=\; \cos^n\theta - \mathsf{C}_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \mathsf{C}_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \cdots$$
et
$$\sin n\theta \;=\; n\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \mathsf{C}_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \mathsf{C}_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta - \cdots$$

Ces deux égalités peuvent se récrire respectivement en
$$\cos n\theta \;=\; \cos^n\theta(1 - \mathsf{C}_n^2\tan^2\theta + \mathsf{C}_n^4\tan^4\theta - \cdots)$$
et
$$\sin n\theta \;=\; \cos^{n-1}\theta\sin\theta(n - \mathsf{C}_n^3\tan^2\theta + \mathsf{C}_n^5\tan^4\theta - \cdots)$$
et la formule annoncée au point b de l'énoncé s'obtient en faisant le quotient membre à membre de ces dernières égalités.

Dans le cas particulier $n = 7$, $\theta = \frac{k\pi}{7}$, où k est un entier non divisible par 7, la formule du point b se réduit à
$$0 \;=\; \tan\frac{k\pi}{7} \cdot \frac{7 - \mathsf{C}_7^3\tan^2\frac{k\pi}{7} + \mathsf{C}_7^5\tan^4\frac{k\pi}{7} - \tan^6\frac{k\pi}{7}}{1 - \mathsf{C}_7^2\tan^2\frac{k\pi}{7} + \mathsf{C}_7^4\tan^4\frac{k\pi}{7} - 7\tan^6\frac{k\pi}{7}}$$

Le facteur $\tan\frac{k\pi}{7}$ n'étant pas nul, l'égalité implique l'annulation du numérateur de la fraction du membre de droite, et donc le fait que $x = \tan\frac{k\pi}{7}$ est une racine du polynôme
$$-p(x) \;=\; 7 - \mathsf{C}_7^3x^2 + \mathsf{C}_7^5x^4 - x^6 \;=\; 7 - 35x^2 + 21x^4 - x^6\,,$$

ce qui, en notant que $\tan(-x) = -\tan x$, établit le point c: le polynôme $p(x)$, de degré 6, admet six racines distinctes qui sont celles annoncées.

Enfin, on sait que si l'entier k n'est pas divisible par 7, $2k$ ne l'est pas non plus; cela indique que, si $\alpha = \tan x$ est racine du polynôme $p(x)$, $\frac{2\alpha}{1-\alpha^2} = \tan 2x$ l'est aussi, ce qui démontre le point d.

Question 3. Résoudre l'inéquation

$$1 - \sqrt{\frac{3-x}{x}} \;\le\; \frac{2}{x-1}\,.$$

Solution. Les deux membres de l'inégalité n'ont de sens que sur le domaine $]0:1[\;\cup\;]1:3]$; en dehors de ce domaine, le radicand serait négatif et/ou l'un des dénominateurs s'annulerait.
Sur ce domaine, l'inéquation se récrit en

$$1 - \frac{2}{x-1} \;\le\; \sqrt{\frac{3-x}{x}}\,, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{x-3}{x-1} \;\le\; \sqrt{\frac{3-x}{x}}\,.$$

On note immédiatement que, dans l'intervalle $]1:3]$, l'inéquation est vérifiée puisque le membre de gauche est négatif et celui de droite positif.
Dans l'intervalle $]0:1[$ les deux membres sont positifs et l'inéquation se récrit en

$$\left(\frac{x-3}{x-1}\right)^2 \;\le\; \frac{3-x}{x} \quad \text{ou encore} \quad \frac{3-x}{(x-1)^2} \;\le\; \frac{1}{x}\,.$$

Les deux dénominateurs étant strictement positifs, l'inéquation se récrit en

$$(3-x)x \;\le\; (x-1)^2 \quad \text{ou encore} \quad 3x - x^2 \;\le\; x^2 - 2x + 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2x^2 - 5x + 1 \;\ge\; 0\,.$$

Les racines du membre de gauche étant $\dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$, le deuxième intervalle des solutions est

$$(\mathbb{R} \setminus]\frac{5-\sqrt{17}}{4} : \frac{5+\sqrt{17}}{4}[) \cap\;]0:1[\quad \text{c'est-à-dire} \quad]0 : \frac{5-\sqrt{17}}{4}]\,.$$

L'ensemble complet des solutions est

$$]0 : \frac{5-\sqrt{17}}{4}] \;\cup\;]1:3]\,.$$

Septembre 2007

Question 1.

a. Démontrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)\,.$$

b. Pour quelles valeurs du paramètre réel a le système suivant n'est-il pas de Cramer? (Un système linéaire est dit de Cramer s'il admet une et une seule solution.)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3 \\ a^2x & + & (a-2)^2y & + & (2a-1)^2z & = & 11-8a \\ a^4x & + & (a-2)^4y & + & (2a-1)^4z & = & 83-80a \end{array}\right.$$

c. Résoudre le système pour les valeurs de a trouvées au point b.

Solution. On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix},$$

ce qui se réduit à $(b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$.
Le déterminant du système proposé au point b est donc

$$\begin{aligned} \Delta &= (a^2-(a-2)^2)\left((a-2)^2-(2a-1)^2\right)\left((2a-1)^2-a^2\right) \\ &= 2(2a-2)(3a-3)(-a-1)(3a-1)(a-1) \\ &= -12(a-1)^3(a+1)(3a-1)\,. \end{aligned}$$

Ce déterminant s'annule pour $a \in \{1, -1, 1/3\}$.

Pour $a = 1$, le système se réduit à trois fois l'équation $x + y + z = 3$; l'ensemble des triplets solutions est donc $\{(\lambda, \mu, 3-\lambda-\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Pour $a = -1$, le système se réduit à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 9y & + & 9z & = & 19 \\ x & + & 81y & + & 81z & = & 183 \end{array}\right. \quad \text{ou encore à} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 81x & + & 81y & + & 81z & = & 243 \\ 9x & + & 81y & + & 81z & = & 171 \\ x & + & 81y & + & 81z & = & 163 \end{array}\right.$$

Par différence, on trouve $8x = 8$ (II−III) et donc $x = 1$. En remplaçant x par sa valeur, chacune des trois équations se réduit à $81y + 81z = 162$, c'est-à-dire à $y + z = 2$. L'ensemble des triplets solutions est donc $\{(1, \lambda, 2-\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Pour $a = 1/3$, le système se réduit à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3 \\ \frac{x}{9} & + & \frac{25y}{9} & + & \frac{z}{9} & = & \frac{25}{3} \\ \frac{x}{81} & + & \frac{625y}{81} & + & \frac{z}{81} & = & \frac{169}{3} \end{array}\right. \quad \text{ou encore à} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 25y & + & z & = & 75 \\ x & + & 625y & + & z & = & 4\,563 \end{array}\right.$$

Par différence, on trouve d'une part $24y = 72$ (II−I) et d'autre part $624y = 4560$ (III−II); ces deux égalités sont incompatibles et le système n'admet aucune solution.

Question 2. Pour des entiers $n > 0$ et $p \geq 0$ on note $S(n,p)$ la somme des $p$ièmes puissances des entiers positifs de 1 à n inclus:

$$S(n,p) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k^p \;=\; 1^p + \cdots + n^p\,.$$

a. Démontrer que $S(n,0) = n\,;$
$S(n,1) = \frac{1}{2}n(n+1)\,;$
$S(n,3) = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2\,.$

b. En utilisant la formule du binôme de Newton, démontrer l'égalité

$$pS(n,p-1) \;=\; (n+1)^p - 1 - \sum_{k=0}^{p-2} \mathsf{C}_p^k S(n,k)\,,$$

valable pour tous entiers $p > 0$ et $n \geq 0$ et retrouver ainsi les égalités du point a.

c. Démontrer que $S(n,p-1)$ est un polynôme de degré p en la variable n dont le coefficient du terme de degré p est $1/p$ et dont le terme indépendant est nul.

Solution. La première égalité est évidente. La deuxième égalité s'obtient aisément par récurrence, ou encore en notant que

$$2S(n,1) = [1+n] + [2+(n-1)] + \cdots + [(n-1)+2] + [n+1] = n(n+1)\,.$$

La troisième égalité s'obtient aussi par récurrence. Elle est clairement vraie pour $n = 1$ et, si l'égalité est vraie pour un certain n, on a

$$S(n+1,3) = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 + (n+1)^3 = \left[\frac{1}{2}(n+1)\right]^2 [n^2 + 4(n+1)] = \left[\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right]^2\,.$$

La formule du binôme de Newton peut s'écrire

$$(k+1)^p \;=\; \sum_{i=0}^{p} \mathsf{C}_p^i k^i\,.$$

On en tire successivement

$$(k+1)^p - k^p \;=\; \sum_{i=0}^{p-1} \mathsf{C}_p^i k^i\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^p - k^p] \;=\; \sum_{i=0}^{p-1} \mathsf{C}_p^i \sum_{k=1}^{n} k^i\,,$$

$$(n+1)^p - 1^p \;=\; \sum_{i=0}^{p-1} \mathsf{C}_p^i S(n,i)\,.$$

Si $p > 0$, la somme du second membre comporte au moins un terme; en isolant le dernier terme de la somme, on obtient exactement l'égalité annoncée.

On exploite l'égalité successivement pour $p = 1, 2, 3$ et 4; cela donne

$$\begin{aligned}
1S(n,0) &= (n+1) - 1 = n\,,\\
2S(n,1) &= (n+1)^2 - 1 - S(n,0) = n(n+1)\,,\\
3S(n,2) &= (n+1)^3 - 1 - S(n,0) - 3S(n,1) = n(n+1)(2n+1)/2\,,\\
4S(n,3) &= (n+1)^4 - 1 - S(n,0) - 4S(n,1) - 6S(n,2) = n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

Cela confirme les résultats du point a.

On a déjà noté que, pour $p = 1, 2, 3, 4$, $pS(n, p-1)$ est un polynôme de degré p en la variable n, dont le coefficient de n^p est 1 et dont le terme indépendant est nul. D'une manière générale, si cette propriété est vraie pour tout $k < p$, elle est également vraie pour p. En effet, le second membre de l'égalité

$$pS(n,p-1) \;=\; (n+1)^p - 1 - \sum_{k=0}^{p-2} \mathsf{C}_p^k S(n,k)$$

est une somme de $p+1$ termes. La somme des deux premiers forme un polynôme du type requis, et les $p-1$ derniers termes sont des polynômes de degrés strictement inférieurs à p et dont les termes indépendants sont tous nuls.

Question 3. Déterminer l'ensemble des valeurs (réelles) de m pour lesquelles l'énoncé:

"Pour tout réel x, on a $mx^2 - (m+1)^2x + 2(m+1) \leq 0$."

est vrai.

Solution. Pour que le trinôme $ax^2 + bx + c$ soit toujours négatif, il faut $a < 0$ et $\rho = b^2 - 4ac \leq 0$ ou bien $a = b = 0$ et $c \leq 0$. Dans le cas présent, le réalisant est $\rho = (m+1)^4 - 8(m+1)$ qui se factorise aisément en $(m+1)(m-1)(m^2+4m-1)$. Les racines de ce polynôme en m sont, par ordre croissant,

$$-2-\sqrt{5}\,,\; -1\,,\; -2+\sqrt{5}\,,\; 1\,.$$

- Dans l'intervalle $]-\infty : -2-\sqrt{5}[$ on a $\rho > 0$ donc l'énoncé est faux.
- Dans l'intervalle $[-2-\sqrt{5} : -1]$ on a $\rho \leq 0$ et $a = m < 0$ donc l'énoncé est vrai.
- Dans l'intervalle $]-1 : -2+\sqrt{5}[$ on a $\rho > 0$ donc l'énoncé est faux.
- Dans l'intervalle $]-2+\sqrt{5} : +\infty[$ on a $a = m < 0$ donc l'énoncé est faux.

En conclusion, l'énoncé est vrai si et seulement si $-2-\sqrt{5} \leq m \leq -1$.

Juillet 2008

Question 1. Résoudre l'inéquation

$$49x^3 + 126x^2 + 44x - 24 \ \leq \ 0\,,$$

sachant que le polynôme du premier membre admet trois racines réelles en progression arithmétique.

Solution. Il existe un réel a et un réel positif b tels que les racines du polynôme du premier membre soient $a-b$, a et $a+b$; ce polynôme peut donc s'écrire $49(x-a+b)(x-a)(x-a-b)$ ou encore

$$49x^3 - 147ax^2 + 49(3a^2 - b^2)x - 49a^3 + 49ab^2\,.$$

Par identification des coefficients du second degré, on trouve $a = -126/147 = -6/7$. Le polynôme est donc divisible par $x + 6/7$ ou encore par $7x + 6$; en fait, il se récrit en

$$(7x + 6)(7x^2 + 12x - 4)\,.$$

Par identification des coefficients du premier degré, on trouve $49b^2 = 64$ et $b = 8/7$.[5]
Les racines du polynôme sont donc, dans l'ordre croissant, -2, $-6/7$ et $2/7$. On en déduit que l'ensemble des solutions est la réunion de deux intervalles:

$$]-\infty : -2] \ \cup \ [-\frac{6}{7} : \frac{2}{7}]\,.$$

Remarque. On peut éviter le calcul explicite de b^2 en résolvant directement l'équation $7x^2+12x-4=0$, dont les racines sont -2 et $2/7$.

[5] L'identification des termes indépendants donne naturellement le même résultat.

Question 2.

1. Calculer toutes les racines sixièmes du nombre complexe i et évaluer la somme de leurs carrés.

2. Soient n et p deux entiers plus grands que 1. Evaluer la somme des $p$ièmes puissances des racines $n$ièmes de i.

Solution. On commence par le deuxième point. Nous utilisons la notation "cis α" comme abréviation de "$\cos\alpha + i\sin\alpha$". La formule de De Moivre s'écrit donc

$$(\text{cis }\alpha)^n = \text{cis }n\alpha\,.$$

Une conséquence immédiate de cette formule est que les solutions de l'équation $z^n = \text{cis }\alpha$ forment l'ensemble

$$\{\text{cis }(\frac{\alpha+2k\pi}{n}) : k \in \{0,\ldots,n-1\}\}\,.$$

La somme des $p$ièmes puissances des racines $n$ièmes de cis α se calcule alors facilement. D'une part, si p est un multiple (entier) de n, chaque terme de la somme vaut cis $q\alpha$, avec $p = qn$, et la somme elle-même vaut $n\,\text{cis }q\alpha$. D'autre part, si p n'est pas un multiple de n, on a le développement suivant:[6]

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(\text{cis }\frac{\alpha+2k\pi}{n})^p &= \sum_{k=0}^{n-1}\text{cis }\frac{p\alpha+2kp\pi}{n}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\text{cis }\frac{p\alpha}{n}\text{cis }\frac{2kp\pi}{n}\\
&= \text{cis }\frac{p\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\text{cis }\frac{2p\pi}{n}\right)^k\\
&= \left(\text{cis }\frac{p\alpha}{n}\right)\frac{1-(\text{cis }\frac{2p\pi}{n})^n}{1-\text{cis }\frac{2p\pi}{n}}\\
&= \left(\text{cis }\frac{p\alpha}{n}\right)\frac{1-\text{cis }2p\pi}{1-\text{cis }\frac{2p\pi}{n}}\\
&= 0
\end{aligned}$$

On sait que $i = \text{cis }\frac{\pi}{2}$; la somme des $p$ièmes puissances des racines $n$ièmes de i est $n\,\text{cis }(q\pi/2)$ si $p = nq$, c'est-à-dire n, ni, $-n$ ou $-ni$ selon que $q \mod 4 = 0$, 1, 2 ou 3, respectivement.
Si p n'est pas un multiple de n, la somme demandée est nulle.

En particulier, 2 n'étant pas multiple de 6, la somme des carrés des racines sixièmes de i est nulle. L'ensemble des racines est

$$\{\text{cis }\frac{(4k+1)\pi}{12} : k \in \{0,\ldots,5\}\}\,.$$

Remarque. On peut aisément déterminer la forme algébrique des racines. Par exemple,

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\,.$$

[6] Si p est un multiple de n, on ne peut pas écrire les dernières lignes de ce développement car cis $\frac{2p\pi}{n}$ vaut 1.

Question 3. Les *nombres de Catalan*[7] interviennent fréquemment en analyse combinatoire. Pour tout entier naturel n, le nombre $\mathbf{c}_n$ est défini comme le nombre de manières de placer des parenthèses dans un produit de $n+1$ facteurs; par exemple, $\mathbf{c}_3 = 5$ puisque le produit des quatre facteurs a, b, c et d admet les cinq groupements suivants: $a(b(cd))$, $a((bc)d)$, $(ab)(cd)$, $(a(bc))d$ et $((ab)c)d$. Nous admettons sans démonstration le résultat suivant:

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{n+1}\mathsf{C}_{2n}^{n}\,. \tag{4}$$

Démontrer que pour tout $n > 0$ on a

1. $\mathbf{c}_n = \mathsf{C}_{2n}^{n} - \mathsf{C}_{2n}^{n-1}$;
2. $(n+1)\mathbf{c}_n = (4n-2)\mathbf{c}_{n-1}$;
3. $\mathbf{c}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{c}_i \mathbf{c}_{n-i-1}$.

Suggestion. Il n'est pas nécessaire de raisonner par récurrence; l'usage direct de la définition et du résultat (4) suffit.

Solution. Les points 1 et 2 sont des conséquences du résultat (4) et de la relation classique

$$\mathsf{C}_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}\,.$$

D'une part, on a

$$\mathsf{C}_{2n}^{n-1} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{n}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{n}{n+1}\mathsf{C}_{2n}^{n} = \mathsf{C}_{2n}^{n} - \frac{1}{n+1}\mathsf{C}_{2n}^{n} = \mathsf{C}_{2n}^{n} - \mathbf{c}_n\,,$$

ce qui établit le premier point. D'autre part, on a

$$(n+1)\mathbf{c}_n = \mathsf{C}_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

et aussi

$$(4n-2)\mathbf{c}_{n-1} = \frac{4n-2}{n}\mathsf{C}_{2n-2}^{n-1} = \quad = \frac{4n-2}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{(2n-1)!2}{n!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!}\,,$$

ce qui établit le point 2.

Le point 3 peut s'établir directement. Supposons un parenthésage de $n+1$ facteurs. L'opération la plus externe porte sur deux blocs de tailles respectives $i+1$ et $n-i$, avec $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Les deux blocs peuvent être parenthésés de respectivement $\mathbf{c}_i$ et $\mathbf{c}_{n-i-1}$ manières, d'où la relation annoncée.

[7]Eugène-Charles Catalan a été professeur à l'université de Liège.

Septembre 2008

Question 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante:

$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1} \leq \sqrt{2}(x+1)\,.$$

Solution. On observe d'abord que les deux trinômes ont un discriminant (réalisant) négatif; le premier membre est donc défini sur $\mathbb{R}$ tout entier et est positif. Le second membre est positif sur l'intervalle $[-1 : +\infty[$ donc on se restreint à cet intervalle dans la suite, puisque l'ensemble des solutions y sera inclus. En élevant les deux membres au carré, on obtient:

$$2(x^2+1)+2\sqrt{(x^2+1)^2-x^2} \leq 2(x+1)^2\,,$$

que l'on récrit en

$$\sqrt{(x^2+1)^2-x^2} \leq (x+1)^2-(x^2+1)\,,$$

puis en

$$\sqrt{(x^2+1)^2-x^2} \leq 2x\,.$$

On peut à nouveau restreindre l'intervalle de recherche, à $[0 : +\infty[$, et élever au carré; on obtient:

$$(x^2+1)^2-x^2 \leq 4x^2\,,$$

ou encore

$$(x^2+1)^2-(\sqrt{5}x)^2 \leq 0\,,$$

c'est-à-dire

$$(x^2+\sqrt{5}x+1)(x^2-\sqrt{5}x+1) \leq 0\,.$$

Dans l'intervalle de recherche, le premier facteur est toujours positif; le second est négatif dans l'intervalle compris entre les deux racines, à savoir

$$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2} : \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right].$$

Cet intervalle est l'ensemble des solutions.

Question 2. Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & - & ay & + & 3az & = & a+1 \\ (a-1)x & + & ay & + & (a+1)z & = & 2a^2 \\ 3ax & + & (3a+1)y & + & (3a+2)z & = & 9a+5 \end{array}\right.$$

Solution. La valeur Δ du déterminant de ce système est

$$\begin{vmatrix} a & -a & 3a \\ a-1 & a & a+1 \\ 3a & 3a+1 & 3a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a-1 & 2a-1 & -2a+4 \\ 3a & 6a+1 & -6a+2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 2a-1 & -2a+4 \\ 6a+1 & -6a+2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 2a-1 & 3 \\ 6a+1 & 3 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire $\Delta = -6a(2a+1)$. Le déterminant s'annule pour $a = 0$ et $a = -1/2$; pour toute autre valeur du paramètre, le système admet une solution unique $x = \alpha/\Delta, y = \beta/\Delta, z = \gamma/\Delta$, les valeurs de α, β, γ étant respectivement:

$$\begin{vmatrix} a+1 & -a & 3a \\ 2a^2 & a & a+1 \\ 9a+5 & 3a+1 & 3a+2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & a+1 & 3a \\ a-1 & 2a^2 & a+1 \\ 3a & 9a+5 & 3a+2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & -a & a+1 \\ a-1 & a & 2a^2 \\ 3a & 3a+1 & 9a+5 \end{vmatrix}.$$

Ces trois déterminants se réduisent respectivement à:

$$(2a+1)(12a^3 - 19a^2 - 6a - 1)\ ,\ (2a+1)(-6a^3 + 14a^2 - 18a + 2)\ ,\ (2a+1)(-6a^3 + 11a^2 - 6a - 1)\,.$$

Si $a \notin \{0, -1/2\}$, l'unique triplet solution (x, y, z) est donc

$$\frac{-12a^3 + 19a^2 + 6a + 1}{6a}\ ,\ \frac{3a^3 - 7a^2 + 9a - 1}{3a}\ ,\ \frac{6a^3 - 11a^2 + 6a + 1}{6a}\,.$$

Si $a = 0$, le système est impossible puisque sa première équation se réduit à $0 = 1$.

Si $a = -1/2$, le système se récrit en:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ -3x & - & y & + & z & = & 1 \\ -3x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Il est indéterminé; pour tout réel λ, le triplet

$$\frac{-1-\lambda}{2}\ ,\ \frac{1+5\lambda}{2}\ ,\ \lambda$$

est solution du système.

Question 3. En évaluant $(1+x^2)^{2n}$ de deux manières différentes, montrer que, pour tout entier naturel n, on a:

$$\mathsf{C}_{2n}^{n} = \left|\left(\mathsf{C}_{2n}^{0}\right)^2 - \left(\mathsf{C}_{2n}^{1}\right)^2 + \left(\mathsf{C}_{2n}^{2}\right)^2 - \cdots + \left(\mathsf{C}_{2n}^{2n}\right)^2\right|.$$

Solution. Une utilisation directe de la formule du binôme de Newton donne

$$(1+x^2)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \mathsf{C}_{2n}^{k} x^{2k}\,;$$

en particulier, le coefficient du terme de degré $2n$ est C_{2n}^{n}.
D'autre part, on a $(1+x^2)^{2n} = (1+ix)^{2n}(1-ix)^{2n}$; en appliquant la formule du binôme de Newton à chacun des deux facteurs, on obtient

$$(1+x^2)^{2n} = \left(\sum_{k=0}^{2n} \mathsf{C}_{2n}^{k} i^k x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{2n} \mathsf{C}_{2n}^{j} (-i)^j x^j\right);$$

en particulier, le coefficient du terme de degré $2n$ est

$$\sum_{k=0}^{2n} \mathsf{C}_{2n}^{k} i^k \mathsf{C}_{2n}^{2n-k} (-i)^{2n-k} \;=\; (-1)^n \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \left(\mathsf{C}_{2n}^{k}\right)^2 \;=\; \left|\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \left(\mathsf{C}_{2n}^{k}\right)^2\right|.$$

Remarque. L'expression $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \left(\mathsf{C}_{2n}^{k}\right)^2$ est positive quand n est pair et négative quand n est impair.

Juillet 2009

Question 1.

1. Calculer le produit AB des matrices A et B suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ m & m & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} m & m & m \\ 2 & m & m \\ 2 & 2 & m \end{pmatrix} .$$

2. Résoudre le système suivant sur $\mathbb{R}$, dans lequel m est un paramètre réel:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (m+4)x & + & 2(m+1)y & + & 3mz & = & \frac{1}{2}m+2 \ ; \\ (m^2+4)x & + & (m^2+m+2)y & + & m(m+2)z & = & m+2 \ ; \\ (m^2+2m+2)x & + & 2(m^2+1)y & + & m(2m+1)z & = & 2m+1 \ . \end{array} \right.$$

Solution. On observe que le produit AB est précisément la matrice des coefficients du système qui peut donc se récrire sous la forme

$$AB \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m+2 \\ m+2 \\ 2m+1 \end{pmatrix} .$$

On calcule aussi

$$\mathrm{dtm}(A) = (m-1)^2 \ , \ \mathrm{dtm}(B) = m(m-2)^2 \text{ et donc } \mathrm{dtm}(AB) = m(m-1)^2(m-2)^2 \ .$$

Ce dernier déterminant s'annule si et seulement si $m \in \{0, 1, 2\}$.
Si m vaut respectivement 0, 1, 2, le système se réduit respectivement à

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 4x & + & 2y & = & 2 \ ; \\ 4x & + & 2y & = & 2 \ ; \\ 2x & + & 2y & = & 1 \ . \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & 4y & + & 3z & = & \frac{5}{2} \ ; \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & 3 \ ; \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & 3 \ . \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 6x & + & 6y & + & 6z & = & 3 \ ; \\ 8x & + & 8y & + & 8z & = & 4 \ ; \\ 10x & + & 10y & + & 10z & = & 5 \ . \end{array} \right.$$

On en tire immédiatement les conclusions suivantes:

- Si $m = 0$, le système est simplement indéterminé; on a $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ et z est un réel quelconque.
- Si $m = 1$, les équations sont incompatibles et le système n'admet aucune solution.
- Si $m = 2$, le système est doublement indéterminé; on a $x = \lambda$, $y = \mu$ et $z = \frac{1}{2} - \lambda - \mu$, où λ et μ sont des réels quelconques.

D'autre part, si $m \notin \{0, 1, 2\}$, le système admet une solution unique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}A^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m+2 \\ m+2 \\ 2m+1 \end{pmatrix} .$$

En reportant les valeurs suivantes, obtenues par la règle des mineurs:

$$A^{-1} = \frac{1}{m-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ m & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B^{-1} = \frac{1}{m(m-2)} \begin{pmatrix} m & -m & 0 \\ 0 & m & -m \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix} ,$$

cette solution se réduit à:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2(m-1)} \begin{pmatrix} -1 \\ -m \\ m+2 \end{pmatrix}.$$

Question 2. Soit $P(x)$ un polynôme sur $\mathbb{R}$. Le reste de la division de $P(x)$ par $x-1$ est 1 et le reste de la division de $P(x)$ par $x+1$ est -1.

- Quel est le reste de la division de $P(x)$ par x^2-1?
- Soient $Q(x)$ et $R(x)$ les polynômes quotient et reste de $P(x^2)$ par x^2+1. Déterminer le polynôme $R(x)$.
- Déterminer le polynôme reste de la division de $Q(x)$ par x^2-1.

Solution. On sait que le reste de la division de $P(x)$ par $x-c$ est $P(c)$. On a donc $P(1)=1$ et $P(-1)=-1$. D'autre part, le reste de la division de $P(x)$ par x^2-1 est l'unique polynôme $ax+b$ pour lequel un polynôme $S(x)$ existe tel que

$$P(x) = (x^2-1)S(x) + ax + b\,.$$

En remplaçant successivement x par 1 et -1, on obtient $1 = a+b$ et $-1 = -a+b$, d'où $a=1$ et $b=0$; le reste de la division de $P(x)$ par x^2-1 est donc le polynôme x, et $P(x) = (x^2-1)S(x) + x$.
On déduit de cela

$$\begin{aligned} P(x^2) &= (x^4-1)S(x^2) + x^2; \\ &= (x^2+1)(x^2-1)S(x^2) + x^2 + 1 - 1; \\ &= (x^2+1)[(x^2-1)S(x^2)+1] - 1. \end{aligned}$$

On a donc

$$Q(x) = (x^2-1)S(x^2) + 1 \quad \text{et} \quad R(x) = -1;$$

de plus, le polynôme reste de la division de $Q(x)$ par x^2-1 est 1.

Question 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2(1-z^2) = 16\,.$$

Solution. En posant $Z=z^2$, on obtient $Z(1-Z)=16$ ou encore $Z^2-Z+16=0$. Le réalisant (discriminant) de cette équation est $-63 = -7\times 3^2$; l'équation admet les deux solutions complexes conjuguées

$$\frac{1 \pm 3\sqrt{7}i}{2}\,.$$

Pour trouver z, on utilise la règle suivante. Si b est positif, les solutions (x,y) de $a\pm bi = (x\pm yi)^2$ sont

$$\left(\sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}+a]/2}, \sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}-a]/2}\right) \quad \text{et} \quad \left(-\sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}+a]/2}, -\sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}-a]/2}\right).$$

Dans le cas présent, on $a=1/2$, $b=3\sqrt{7}/2$, $a^2=1/4$, $b^2=63/4$, $a^2+b^2=16$ et $\sqrt{a^2+b^2}=4$, d'où les quatre solutions

$$\frac{3+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-3+i\sqrt{7}}{2}, \frac{3-i\sqrt{7}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{7}}{2}\,.$$

Septembre 2009

Question 1. Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{aligned} &2ax + (a+1)y + (a-1)z = 2a+3\,, \\ &2x + (1+a)y + (1-a)z = 4a+1\,, \\ &(a+1)x + (a+1)y = 3a+2\,. \end{aligned}$$

Solution. On peut d'abord observer que la troisième équation est inutile, puisque c'est la demi-somme des deux autres. En remplaçant la première équation par la différence de la première et de la seconde, on obtient

$$\begin{aligned} &2(a-1)x + 2(a-1)z = -2(a-1)\,, \\ &2x + (1+a)y + (1-a)z = 4a+1\,. \end{aligned}$$

- Si $a = 1$, la première équation disparaît et le système se réduit à

  $$2x + 2y = 5\,.$$

  Les solutions sont $x = (5 - 2\lambda)/2$, $y = \lambda$, $z = \mu$.

- Si $a = -1$, le système devient

  $$\begin{aligned} &2x + 2z = -4\,, \\ &2x + 2z = -3\,. \end{aligned}$$

  Il n'admet pas de solution.

- Dans les autres cas, c'est-à-dire quand $(a+1)(a-1) \neq 0$, le système devient

  $$\begin{aligned} &2x + 2z = -2\,, \\ &2x + (1+a)y + (1-a)z = 4a+1\,. \end{aligned}$$

  les solutions sont $z = \lambda$, $x = -1 - \lambda$, $(1+a)y = 4a + 1 + 2 + 2\lambda + (a-1)\lambda = 4a + 3 + (a+1)\lambda$, c'est-à-dire $y = \lambda + \frac{4a+3}{a+1}$.

(λ et μ sont des paramètres quelconques.)

Question 2. Trouver dans $\mathbb{C}$ les racines du polynôme P tel que

$$P(z) \;=\; (1-z^2)^3 - (1-z)^3\,.$$

Solution. De l'égalité $1-z^2 = (1-z)(1+z)$ on tire successivement $(1-z^2)^3 = (1-z)^3(1+z)^3$ et

$$P(z) \;=\; (1-z)^3[(1+z)^3 - 1]\,.$$

Le premier facteur admet la racine triple 1. Les trois racines cubiques complexes de l'unité étant $\operatorname{cis} 0 = 1$, $\operatorname{cis} 2\pi/3 = (-1+i\sqrt{3})/2$ et $\operatorname{cis} 4\pi/3 = (-1-i\sqrt{3})/2$, le second facteur admet les trois racines simples 0, $(-3+i\sqrt{3})/2$ et $(-3-i\sqrt{3})/2$.

Question 3. On note a et b les racines du polynôme

$$x^2 - \sqrt{2+\sqrt{3-\sqrt{5}}}\,x + \sqrt{3-\sqrt{5}}\,.$$

Donner un polynôme du second degré dont les racines sont a^2+b^2 et $2+ab$. Les coefficients de ce polynôme doivent être écrits sous une forme aussi simple que possible.

Solution. On a

$$a+b = \sqrt{2+\sqrt{3-\sqrt{5}}} \;\text{ et }\; ab = \sqrt{3-\sqrt{5}}\,,$$

d'où on tire

$$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 2 + \sqrt{3-\sqrt{5}} - 2\sqrt{3-\sqrt{5}} = 2 - \sqrt{3-\sqrt{5}}$$

et

$$2+ab = 2+\sqrt{3-\sqrt{5}}\,.$$

La somme de ces deux nombres est 4, leur produit est $2^2 - (3-\sqrt{5}) = 1+\sqrt{5}$. Le polynôme demandé est donc

$$x^2 - 4x + (1+\sqrt{5})\,.$$

Remarque. On a utilisé deux fois la propriété suivante: “Si deux nombres (réels ou complexes) ont pour somme S et pour produit P, alors ces deux nombres sont les racines du polynôme $x^2 - Sx + P$”.

Juillet 2010

Question 1. Démontrer l'égalité suivante, dans laquelle $n \geq 1$ est un nombre entier:

$$1\mathsf{C}_n^1 + 4\mathsf{C}_n^2 + \cdots + n^2\mathsf{C}_n^n \; = \; n(n+1)2^{n-2}\,.$$

Suggestion: développer $(1+x)^n$ et dériver deux fois.

Solution. En dérivant (par rapport à x) le développement

$$(1+x)^n \; = \; \sum_{k=0}^{n} \mathsf{C}_n^k x^k\,,$$

on obtient:

$$n(1+x)^{n-1} \; = \; \sum_{k=1}^{n} k\mathsf{C}_n^k x^{k-1}\,. \tag{5}$$

En dérivant à nouveau on obtient:

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} \; = \; \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathsf{C}_n^k x^{k-2}\,. \tag{6}$$

En posant $x = 1$ dans les égalités (5) et (6) on obtient successivement:

$$n2^{n-1} \; = \; 2n2^{n-2} \; = \; \sum_{k=1}^{n} k\mathsf{C}_n^k \tag{7}$$

et

$$n(n-1)2^{n-2} \; = \; \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathsf{C}_n^k \; = \; \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\mathsf{C}_n^k\,. \tag{8}$$

Enfin, en additionnant (7) et (8), on obtient le résultat attendu:

$$n(n+1)2^{n-2} \; = \; \sum_{k=1}^{n} k^2\mathsf{C}_n^k\,.$$

Question 2. Trouver dans $\mathbb{C}$ les racines du polynôme P tel que

$$P(z) \; = \; (1-z^3)^3 - (1-z)^3\,.$$

Rappel théorique.

Equation $\sigma^2 = \rho$. Soit ρ un nombre complexe quelconque. Pour trouver σ, on utilise la règle suivante.
Si b est positif, les solutions (x, y) de $a \pm bi = (x \pm yi)^2$ sont

$$\left(\sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}+a]/2}, \sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}-a]/2}\right) \quad \text{et} \quad \left(-\sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}+a]/2}, -\sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}-a]/2}\right)\,.$$

Remarque. En algèbre, la notation $\sqrt{x}$ s'utilise seulement si x est un réel positif; dans ce cas, $\sqrt{x}$ est aussi un réel positif.

Equation du second degré à coefficients complexes. Si α, β et γ sont des nombres complexes, si $\alpha \neq 0$, si $\rho = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ et si $\sigma^2 = \rho$, alors les solutions de l'équation

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma \;=\; 0$$

sont

$$\frac{-\beta + \sigma}{2\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{-\beta - \sigma}{2\alpha}\,.$$

Solution. Le polynôme se récrit successivement en

$$\begin{aligned} P(z) &= [(1-z)(1+z+z^2)]^3 - (1-z)^3\,, \\ &= (1-z)^3(1+z+z^2)^3 - (1-z)^3\,, \\ &= (1-z)^3[(1+z+z^2)^3 - 1]\,. \end{aligned}$$

Le premier facteur donne la racine triple 1.
Le second facteur est de degré 6. Ses six racines sont les solutions des trois équations du second degré suivantes:

$$\begin{aligned} 1+z+z^2 &= 1\,, \\ 1+z+z^2 &= \omega\,, \\ 1+z+z^2 &= \omega^2\,, \end{aligned}$$

où $\omega = (-1+i\sqrt{3})/2$ et $\omega^2 = (-1-i\sqrt{3})/2$ sont les deux racines cubiques non réelles de l'unité.
Les racines de la première équation sont 0 et -1.
La deuxième équation se récrit en

$$z^2 + z + (3 - i\sqrt{3})/2 \;=\; 0\,;$$

Avec les notations et la méthode du rappel ci-dessus, on a successivement:

$$\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = (3 - i\sqrt{3})/2,\ \rho = -5 + 2i\sqrt{3},\ \sigma = \sqrt{(\sqrt{37}-5)/2} + i\sqrt{(\sqrt{37}+5)/2}\,;$$

les deux racines sont $(-1-\sigma)/2$ et $(-1+\sigma)/2$.
La troisième équation étant la conjuguée de la deuxième, ses racines sont $(-1-\bar{\sigma})/2$ et $(-1+\bar{\sigma})/2$.

Question 3. Le polynôme

$$\sqrt{2}x^4 - 2(2+\sqrt{2}+\sqrt{6})x^3 + 2(2+3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6})x^2 - 2(6+3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6})x + 3(4+3\sqrt{2})$$

admet deux racines réelles doubles distinctes a et b. Déterminer la paire $\{a, b\}$.

Solution. Le polynôme donné s'identifie au polynôme

$$\sqrt{2}(x-a)^2(x-b)^2\,,$$

c'est-à-dire au polynôme

$$\sqrt{2}[x^4 - 2(a+b)x^3 + ((a+b)^2 + 2ab)x^2 - 2(a+b)abx + a^2b^2]\,.$$

En égalant les termes en x^3, on obtient

$$\sqrt{2}(a+b) \;=\; 2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}\,,$$

ou encore
$$a + b \;=\; 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\,.$$
En égalant les termes en x, on obtient
$$(a + b)ab \;=\; 3 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}\,,$$
d'où on tire
$$ab \;=\; \frac{3 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \;=\; \sqrt{3}(1 + \sqrt{2})\,.$$
On tire immédiatement de cela
$$\{a, b\} \;=\; \{1 + \sqrt{2}, \sqrt{3}\}\,.$$
A titre de vérification, on peut observer que le développement du polynôme
$$\sqrt{2}(x - \sqrt{3})^2(x - 1 - \sqrt{2})^2$$
est bien celui donné dans l'énoncé.

Septembre 2010

Question 1. Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{aligned}&(a+6)x + 2y + a(a+4)z = 1 - a\,,\\ &2x - (a+1)y - 2az = 17 + a\,,\\ &(a+10)x + (a^2 - 15)y + a^2 z = 35 + a\,.\end{aligned}$$

Solution. On observe d'abord que $E_3 - E_1 - 2E_2$ se réduit à

$$(a^2 + 2a - 15)y = (a+5)(a-3)y = 0\,.$$

On en déduit que le système se réduit à ses deux premières équations si $a = -5$ ou $a = 3$; ces deux cas seront étudiés plus loin. Dans les autres cas, le système se réduit à

$$\begin{aligned}&(a+6)x + a(a+4)z = 1 - a\,,\\ &2x - 2az = 17 + a\,,\\ &y = 0\,.\end{aligned}$$

Son déterminant se réduit à $a\begin{vmatrix} a+6 & a+4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$; il s'annule pour $a = 0$ et pour $a = -5$.
Dans le cas général $a \notin \{-5, 0, 3\}$, le système admet la solution unique

$$x = \frac{a+14}{4}\,,\ y = 0\,,\ z = -\frac{a+20}{4a}\,.$$

Si $a = -5$, le système est indéterminé:

$$x + 2y + 5z = 6\,,\quad 2x + 4y + 10z = 12\,.$$

En posant $y = \lambda$ et $z = \mu$, on obtient $(x, y, z) = (6 - 2\lambda - 5\mu, \lambda, \mu)$.

Si $a = 3$, le système est aussi indéterminé:

$$9x + 2y + 21z = -2\,,\quad x - 2y - 3z = 10\,.$$

En posant $z = \lambda$, on obtient $(x, y, z) = ((4 - 9\lambda)/5,\ (-23 - 12\lambda)/5,\ \lambda)$.

Si $a = 0$, le système se réduit à

$$6x = 1\,,\quad 2x = 17\,,\quad y = 0\,;$$

il est donc impossible.

Question 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$i(1+z)^4 \;=\; 1\,.$$

Solution. En posant $Z = 1 + z$, l'équation se récrit en

$$Z^4 \;=\; -\,i\,.$$

dont on tire successivement (voir le rappel théorique de la session de juillet 2010)

$$Z^2 \in \{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\,,\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\}$$

et

$$Z \in \{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i\}$$

dont on tire immédiatement les quatre valeurs possibles de z.

Remarque. De $Z^4 = -i = \mathrm{cis}\,(3\pi/2)$, on déduit immédiatement que les quatre valeurs possibles de Z sont $\mathrm{cis}\,(3\pi/8)$, $\mathrm{cis}\,(7\pi/8)$, $\mathrm{cis}\,(11\pi/8)$ et $\mathrm{cis}\,(15\pi/8)$.

Question 3. Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{a, -a-1\}$ l'inéquation paramétrique

$$\frac{x}{x-a} + \frac{x+1}{x+a+1} \ \geq\ 0\,,$$

où $a \in [0 : +\infty[$.

Solution. En réduisant au même dénominateur, on obtient

$$\frac{2x^2+2x-a}{(x-a)(x+a+1)} \ \geq\ 0$$

ou encore

$$\frac{2(x-a_1)(x-a_2)}{(x-a)(x+a+1)} \ \geq\ 0$$

avec

$$a_1 = \frac{-1-\sqrt{1+2a}}{2}\,,\ a_2 = \frac{-1+\sqrt{1+2a}}{2}\,.$$

On note d'abord la relation suivante, valable pour tout réel positif a, qui permet une discussion simple du signe du membre de gauche de l'inéquation:

$$-a-1 \leq a_1 < a_2 \leq a\,.$$

On établit la première inégalité par le développement suivant, dans lequel chaque inégalité est conséquence de la suivante, la dernière étant évidente:

$$\begin{array}{rcl} -a-1 & \leq & \frac{-1-\sqrt{1+2a}}{2}\,, \\ -2a-2 & \leq & -1-\sqrt{1+2a}\,, \\ -2a-1 & \leq & -\sqrt{1+2a}\,, \\ \sqrt{1+2a} & \leq & 1+2a\,, \\ 1+2a & \leq & (1+2a)^2\,. \end{array}$$

La deuxième inégalité est évidente et la troisième s'établit comme la première; on note aussi que toutes les inégalités sont strictes, sauf si $a = 0$.

Si $a > 0$, l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$]-\infty : -a-1[\ \cup\ [a_1 : a_2]\ \cup\ ]a : +\infty[\,.$$

Dans le cas particulier $a = 0$, l'ensemble des solutions est $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

Juillet 2011

Question 1. Sachant que les nombres réels a et b vérifient $a^4 + b^4 = 7$ et $ab = -1$, on demande de montrer que les nombres a^2+b^2, a^6+b^6, a^8+b^8 et $a^{10}+b^{10}$ sont tous entiers et d'en calculer les valeurs. Existe-t-il une technique simple pour calculer $f(n) = a^{2n} + b^{2n}$ pour tout entier naturel n ? Est-ce que $f(n)$ est toujours entier ? Peut-on déterminer les réels a^2, b^2, a et b ?

Solution. On a d'abord

$$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = 7 + 2 = 9\,,$$

d'où, les carrés étant positifs, $f(1) = a^2 + b^2 = 3$. De ceci et de $a^2b^2 = 1$, on déduit que a^2 et b^2 sont les racines du trinôme $x^2 - 3x + 1$; on a donc:

$$\{a^2,\ b^2\} \ = \ \{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,,\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\}\,. \tag{9}$$

On a aussi $f(0) = a^0 + b^0 = 1 + 1 = 2$.
On pourrait se servir des valeurs données en (9) pour calculer a^6, a^8, a^{10} et b^6, b^8, b^{10} mais, dans la mesure où on demande seulement les sommes $a^{2n} + b^{2n}$, il est plus simple de procéder comme suit.
On a $(a^2+b^2)(a^4+b^4) = a^6+b^6+a^2b^2(a^2+b^2)$, d'où $21 = (a^6+b^6)+3$ et $a^6+b^6 = 18$. De même, par exemple, $(a^6+b^6)(a^4+b^4) = (a^{10}+b^{10})+a^4b^4(a^2+b^2)$, d'où $126 = (a^{10}+b^{10})+3$ et $a^{10} + b^{10} = 123$.
Plus généralement, si $n \geq 1$, on a

$$(a^{2n}+b^{2n})(a^2+b^2) = (a^{2n+2}+b^{2n+2})+(a^{2n}b^2+b^{2n}a^2) = (a^{2n+2}+b^{2n+2})+a^2b^2(a^{2n-2}+b^{2n-2})\,,$$

d'où

$$3f(n) = f(n+1) + f(n-1)\,,$$

c'est-à-dire

$$f(n+1) = 3f(n) - f(n-1)\,.$$

Si on tient compte des conditions de départ

$$f(0) = 2\,,\ f(1) = 3\,,$$

on voit que $f(n)$ est toujours entier et facile à calculer; on a en particulier $f(3) = 18$, $f(4) = 47$ et $f(5) = 123$.
Enfin, on a aussi $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 1$, d'où $a + b = \pm 1$ et, en tenant compte de $ab = -1$,

$$\{a,\ b\} \ = \ \{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\} \ \text{ ou } \ \{a,\ b\} \ = \ \{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,,\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}\,.$$

Question 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\quad z^4 + |z| = 0\,.$

Suggestion. Calculer d'abord la valeur de $|z|$.

Solution. De $z^4 = -|z|$ on tire $|z|^4 = |z^4| = |-|z|| = |z|$; les seules valeurs possibles pour $|z|$ sont donc 0 et 1. Si $|z| = 0$, on a nécessairement $z = 0$ qui est une première solution de l'équation posée. Si $|z| = 1$, on peut poser $z = \operatorname{cis}\theta$ et l'équation se récrit

$$\operatorname{cis} 4\theta \;+\; 1 \;=\; 0$$

ou encore

$$\operatorname{cis} 4\theta \;=\; -1 \;=\; \operatorname{cis}\pi$$

dont on tire

$$4\theta \;=\; \pi + 2k\pi$$

ou encore

$$\theta \;=\; (2k+1)\pi/4\,.$$

En résumé, l'ensemble des solutions est

$$\{0\,, \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\,, \operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}\,, \operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}\,, \operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}\} \;=\; \{0\,,\; \frac{(1+i)\sqrt{2}}{2}\,,\; -\frac{(1-i)\sqrt{2}}{2}\,,\; -\frac{(1+i)\sqrt{2}}{2}\,,\; \frac{(1-i)\sqrt{2}}{2}\}\,.$$

Question 3. Démontrer l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \mathsf{C}_{k+1}^{2} \;=\; \mathsf{C}_{n+2}^{3}\,,$$

valable pour tout entier n strictement positif.

Solution directe. Le membre de droite est le nombre de triplets distincts inclus dans $\{1, \ldots, n+2\}$. L'ensemble de ces triplets se partitionne en n parties, selon les n valeurs possibles du plus grand élément du triplet; ces valeurs forment l'ensemble $\{3, 4, \ldots, n+2\}$.
Le nombre de triplets dont le plus grand élément vaut $k+2$ est C_{k+1}^{2}, qui correspond au nombre de manières de sélectionner les deux autres éléments dans l'ensemble $\{1, \ldots, k+1\}$. L'égalité est alors immédiate.

Solution par récurrence. Pour $n = 1$, l'égalité se réduit à $\mathsf{C}_2^2 = \mathsf{C}_3^3$. D'autre part, si pour un entier $n \geq 1$ l'égalité proposée est vraie, on obtient l'égalité pour $n+1$ en ajoutant C_{n+2}^{2} aux deux membres. En effet, on a toujours $\mathsf{C}_{n+2}^{3} + \mathsf{C}_{n+2}^{2} = \mathsf{C}_{n+3}^{3}$.

Remarque. En utilisant de manière répétée l'égalité $\mathsf{C}_a^b = \mathsf{C}_{a-1}^{b-1} + \mathsf{C}_{a-1}^{b}$, valable si $0 < b < a$, on a $\mathsf{C}_{n+2}^{p} = \mathsf{C}_{n+1}^{p-1} + \mathsf{C}_{n+1}^{p} = \cdots = \mathsf{C}_{n+1}^{p-1} + \mathsf{C}_{n}^{p-1} + \cdots + \mathsf{C}_{p}^{p-1} + \mathsf{C}_{p}^{p} = \mathsf{C}_{n+1}^{p-1} + \mathsf{C}_{n}^{p-1} + \cdots + \mathsf{C}_{p}^{p-1} + \mathsf{C}_{p-1}^{p-1}$, valable si $0 < p-2 \leq n$; on a donc $\mathsf{C}_{n+2}^{p} = \sum_{k=p-2}^{n} \mathsf{C}_{k+1}^{p-1}$. L'énoncé correspond au cas particulier $p = 3$.

Septembre 2011

Question 1. Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{cases} 2x + 3y + (a-1)z = 2\,; \\ 4x + 3ay + az = 4\,; \\ (6-3a)y + (a-2)z = 0\,. \end{cases}$$

Solution. Si $a = 2$, la troisième équation disparaît ($0 = 0$); la deuxième devient le double de la première et est donc inutile. La première équation devient $2x + 3y + z = 2$. Les solutions du système sont $(x, y, z) = (\lambda,\, \mu,\, 2 - 2\lambda - 3\mu)$, où λ et μ sont des réels quelconques.

Si $a \neq 2$, le système se réduit à

$$\begin{cases} 2x + 3y + (a-1)z = 2\,; \\ 4x + 3ay + az = 4\,; \\ 3y - z = 0\,. \end{cases}$$

ou encore, en éliminant z dans les deux premières équations, à

$$\begin{cases} 2x + 3ay = 2\,; \\ 4x + 6ay = 4\,; \\ 3y - z = 0\,. \end{cases}$$

La deuxième équation est inutile et le système se réduit à

$$\begin{cases} 2x + 3ay = 2\,; \\ 3y - z = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont $(x, y, z) \;=\; (\dfrac{2-3a\lambda}{2},\, \lambda,\, 3\lambda)$, où λ est un réel quelconque.

Question 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2(\log x)^3 + \frac{\log(x^{20})}{10} - \frac{(\log(x^{\sqrt{20}}))^2}{4} \;=\; 0\,.$$

La notation log désigne le logarithme en base 10.

Solution. Le réel x doit être strictement positif. En tenant compte de la propriété connue

$$\log(x^y) \;=\; y \log x\,,$$

l'équation peut se récrire en

$$2(\log x)^3 + 2\log x - 5(\log x)^2 \;=\; 0\,,$$

puis en

$$(\log x)\,[2(\log x)^2 + 2 - 5\log x] \;=\; 0\,.$$

Le premier facteur s'annule pour $x = 1$; le second est un polynôme du second degré en $\log x$ qui s'annule si $\log x$ vaut 2 ou $1/2$, c'est-à-dire si $x = 100$ ou $x = \sqrt{10}$.

Question 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{x+\sqrt{(x+1)/2}}{\sqrt{(x+1)/2}} \ \leq \ x+1\,.$$

Solution. L'inéquation est définie sur l'intervalle $]-1:+\infty[$. Elle peut se récrire en

$$\frac{x}{\sqrt{(x+1)/2}}+1 \ \leq \ x+1\,,$$

ou encore en

$$\frac{x}{\sqrt{(x+1)/2}} \ \leq \ x\,.$$

Si $x=0$, l'inégalité est vérifiée.
Si $x>0$, l'inéquation se simplifie en

$$\sqrt{(x+1)/2} \ \geq \ 1$$

ou encore en

$$x+1 \ \geq \ 2\,,$$

c'est-à-dire $x \geq 1$.
Si $-1<x<0$, l'inéquation se simplifie en

$$\sqrt{(x+1)/2} \ \leq \ 1$$

ou encore en

$$x+1 \ \leq \ 2\,,$$

qui est toujours vrai.
L'ensemble des solutions est donc

$$]-1:0] \ \cup \ [1:+\infty[\,.$$

Juillet 2012

Question 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$4z^5 - 12z^2 + \frac{9}{z} = 0\,.$$

On donnera la forme algébrique et la forme trigonométrique de chaque solution.

Solution. L'équation peut se récrire

$$\frac{1}{z}(2z^3 - 3)^2 = 0\,.$$

Le premier facteur ne s'annule jamais; le second s'annule si et seulement si $z^3 = 3/2$. Les solutions de l'équation sont donc les trois racines du polynôme $2z^3 - 3$, c'est-à-dire, en posant $r = \sqrt[3]{3/2}$, les nombres r, $r(-1 + i\sqrt{3})/2$ et $r(-1 - i\sqrt{3})/2$; les formes trigonométriques correspondantes sont r, $r\,\mathrm{cis}\,(2\pi/3)$ et $r\,\mathrm{cis}\,(4\pi/3)$.

Question 2. La suite f et la matrice Φ de Fibonacci sont définies par les égalités:

$$f_0 = 0\,,\ f_1 = 1\,,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ pour } n = 2, 3, \ldots\,; \qquad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que, pour tout entier naturel $n > 0$, on a $\Phi^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$.
En déduire l'égalité $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$.

Solution. La première égalité se démontre simplement par récurrence. Elle est évidente pour $n = 1$ et, si elle est vraie pour un naturel n, elle est encore vraie pour $n + 1$ car

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

La seconde égalité est évidente pour $n = 0$. Pour $n > 0$, on développe l'égalité $\Phi^{2n} = \Phi^n\Phi^n$; on obtient ainsi $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$, et aussi $f_{2n} = (f_{n+1} + f_{n-1})f_n$.

Question 3. Déterminer la valeur de k sachant que le polynôme $x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + kx^2 + (2 + 5\sqrt{2})x - 2\sqrt{2}$ admet quatre racines réelles x_1, x_2, x_3, x_4 telles que $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$; on calculera aussi les racines.
Remarque. On peut souvent simplifier $\sqrt{a \pm b\sqrt{2}}$ en cherchant x, y tels que $(x \pm y\sqrt{2})^2 = a \pm b\sqrt{2}$.

Solution. La somme des quatre racines vaut l'opposé du coefficient de x^3, c'est-à-dire $2\sqrt{2}$; on a donc $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = \sqrt{2}$. Le polynôme donné est donc égal au produit des deux trinômes $x^2 - \sqrt{2}x + a$, de racines x_1 et x_2, et $x^2 - \sqrt{2}x + b$, de racines x_3 et x_4, pour des valeurs à déterminer de a et b. Ce produit vaut $x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + (a + 2 + b)x^2 - \sqrt{2}(a + b)x + ab$. On en déduit les trois égalités suivantes:

$$k = a + 2 + b\,;\quad 2 + 5\sqrt{2} = -\sqrt{2}(a + b)\,;\quad -2\sqrt{2} = ab\,.$$

De la deuxième inégalité on déduit $2\sqrt{2}+10 = -2(a+b)$, d'où $a+b = -(\sqrt{2}+5)$ et $k = -(\sqrt{2}+3)$. De plus, a et b sont les racines du trinôme $X^2+(\sqrt{2}+5)X-2\sqrt{2}$; le discriminant vaut $\Delta = 27+18\sqrt{2} = (3+3\sqrt{2})^2$ et les racines valent $\frac{-(\sqrt{2}+5)\pm(3+3\sqrt{2})}{2}$, c'est-à-dire $\sqrt{2} - 1$ et $-2(\sqrt{2} + 2)$. On trouve alors facilement $\{x_1, x_2\} = \{1,\ \sqrt{2} - 1\}$ et $\{x_3, x_4\} = \{\sqrt{2} + 2,\ -2\}$.

Septembre 2012

Question 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^{2n} + 2x^n \cos\alpha + 1 = 0$, si n est un paramètre entier strictement positif et α un paramètre réel.

Solution. En posant $X = x^n$ on obtient $X^2 + 2X\cos\alpha + 1 = 0$, équation du second degré dont le discriminant, négatif ou nul, est $4(\cos^2\alpha - 1) = -4\sin^2\alpha$ et dont les deux solutions sont $-\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, ou encore (en utilisant l'abréviation $\operatorname{cis} x = \cos x + i\sin x$), $\operatorname{cis}(\pi \pm \alpha)$. Ces deux nombres sont distincts sauf si α est un multiple de π. Les solutions de l'équation initiale sont les racines $n$ièmes de ces nombres; elles forment l'ensemble

$$\left\{\operatorname{cis}\frac{(2k+1)\pi \pm \alpha}{n} : k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}.$$

Question 2. Soit a un réel non nul et $P(x)$ un polynôme sur $\mathbb{R}$ tel que le reste de la division de $P(x)$ par $2x+1$ est a et le reste de la division de $P(x)$ par $ax+1$ est 2. Peut-on déterminer le reste de la division de $P(x)$ par $(2x+1)(ax+1)$? Si oui, quel est-il?

Solution. Si $a = 2$, on sait seulement que le reste de la division de $P(x)$ par $2x+1$ est 2, ce qui ne permet pas de déterminer le reste de la division de $P(x)$ par $(2x+1)^2$.
Si $a \neq 2$ (et $a \neq 0$), il existe des polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tels que

$$P(x) = (2x+1)Q(x) + a \quad \text{et} \quad P(x) = (ax+1)R(x) + 2\,;$$

on en tire $P(-1/2) = a$ et $P(-1/a) = 2$. Il existe aussi un polynôme $S(x)$ et deux réels b et c tels que

$$P(x) = (2x+1)(ax+1)S(x) + bx + c\,.$$

On a en particulier $P(-1/2) = a = -b/2 + c$ et $P(-1/a) = 2 = -b/a + c$, d'où on tire facilement $b = -2a$ et $c = 0$; le reste de la division de $P(x)$ par $(2x+1)(ax+1)$ est donc le polynôme $-2ax$.

Question 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1$.

Solution. La condition d'existence est $3x^2 + 5x + 2 \geq 0$, c'est-à-dire, puisque les racines du trinôme sont -1 et $-2/3$, $x \notin\,]-1 : -2/3[$. Si cette condition est respectée, l'inéquation se récrit en

$$\sqrt{3x^2+5x+7} > 1 + \sqrt{3x^2+5x+2}$$

ou encore, en élevant les deux membres (positifs) au carré et en réarrangeant les termes,

$$4 > 2\sqrt{3x^2+5x+2} \quad \text{ou encore} \quad 4 > 3x^2 + 5x + 2\,,$$

c'est-à-dire

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x-1)(x+2) < 0\,,$$

ce qui signifie $x \in\,]-2 : 1/3[$; en tenant compte de la condition d'existence, on a

$$x \in\,]-2 : -1] \cup [-2/3 : 1/3[\,.$$

Juillet 2013

Question 1. Soit un polynôme à coefficients réels $P(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $c < 0 < a$.
a) Prouver que le discriminant $\Delta_P = b^2 - 4ac$ est strictement positif et que le polynôme admet deux racines réelles u et v telles que $u < 0 < v$.

b) Soit $e = v/2$ et $Q(x) = -x^2 P(e + \frac{1}{x}) = a'x^2 + b'x + c'$. Etablir $c' < 0 < a'$ et $\Delta_Q = \Delta_P$.

c) Pour quelles valeurs de $e \in \{0, \frac{u}{3}, \frac{u+v}{4}, -\frac{b}{10a}, \sqrt{-u}, \sqrt{v}, \sqrt{-uv}\}$ le point *b*) reste-t-il vrai ?

Solution. Le point *a*) est évident: le discriminant $b^2 + 4a|c|$ est la somme d'un terme positif et d'un terme strictement positif; de plus, le produit c/a des racines est strictement négatif.
b). On commence par calculer le polynôme Q, pour n'importe quelle valeur de e. On obtient facilement $a' = -(ae^2 + be + c)$, $b' = -2ae - b$ et $c' = -a$ et on observe que $a' = -P(e)$ est strictement positif si et seulement si e est strictement compris entre les deux racines u et v, ce qui est le cas pour $e = v/2$. On a enfin $\Delta_Q = (2ae + b)^2 - 4a(ae^2 + be + c)$, ce qu'un calcul élémentaire permet de réduire à $b^2 - 4ac$.
c). Le point *b*) reste vrai pour toute valeur de e strictement comprise entre u et v. C'est toujours le cas pour 0, $\frac{u}{3}$, $\frac{u+v}{4}$ et $-\frac{b}{10a}$ (puisque $-\frac{b}{2a}$ est la moyenne arithmétique des racines). Ce n'est pas toujours vrai pour les trois autres valeurs proposées; un contre-exemple commun est $P'(x) = 6x^2 + x - 1$.

Question 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante, dans laquelle a est un paramètre réel:

$$a + \sqrt{x - a} \leq \frac{x}{a - \sqrt{x - a}}\,.$$

Quand a-t-on l'égalité?

Solution. Les conditions d'existence sont $x \geq a$ et $a \neq \sqrt{x - a}$. Si le dénominateur $a - \sqrt{x - a}$ est strictement négatif, l'inéquation peut se récrire en $(a + \sqrt{x - a})(a - \sqrt{x - a}) \geq x$, puis en $a^2 - (x - a) \geq x$, ce qui se réduit à $2x \leq a^2 + a$. Si le dénominateur est strictement positif, l'inéquation se réduit à $2x \geq a^2 + a$.
Compte tenu des conditions d'existence, le dénominateur est strictement positif si

$$x \geq a \geq 0 \text{ et } a^2 + a > x\,;$$

il est strictement négatif si

$$x \geq a \text{ et } (a < 0 \text{ ou } a^2 + a < x)\,.$$

On en tire les conclusions suivantes, où S est l'ensemble des solutions:

- Si $a < 0$, le dénominateur est toujours négatif et $S = \{x : 2a \leq 2x \leq a^2 + a\}$, avec égalité pour $x = (a^2 + a)/2$.
- Si $a = 0$, alors $S = \emptyset$.
- Si $a > 0$, il n'y a de solutions que si le dénominateur est positif car les inégalités $x \geq a$, $a^2 + a < x$ et $2x \leq a^2 + a$ sont incompatibles; on a donc
  - Si $0 < a < 1$, alors $S = \{x : a \leq x < a^2 + a\}$ (égalité: jamais).
  - Si $a \geq 1$, alors $S = \{x : a^2 + a \leq 2x < 2a^2 + 2a\}$ (égalité pour $x = (a^2 + a)/2$).

Question 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant, dans lequel m est un paramètre complexe:

$$\begin{cases} mx + y = -i \\ ix + (im+2)y = -m \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de m le système admet-il au moins une solution (x, y) telle que $x, y \in \mathbb{R}$?

Solution. Le déterminant Δ vaut $\begin{vmatrix} m & 1 \\ i & im+2 \end{vmatrix} = im^2 + 2m - i = i(m^2 - 2im - 1) = i(m-i)^2$.
Il s'annule pour $m = i$; dans ce cas, chacune des équations se ramène à $ix + y = -i$ et, si x est un complexe quelconque, le couple $(x, -i(1+x))$ est une solution; x et y sont réels tous les deux dans le seul cas $(x, y) = (-1, 0)$.

Si $m \neq i$, la solution unique est

$$x = \frac{2(m-i)}{\Delta} = \frac{2}{i(m-i)} \; ; \; y = -\frac{m^2+1}{\Delta} = -\frac{m+i}{i(m-i)} \, .$$

Le nombre x est réel si et seulement si m est imaginaire pur; dans ce cas, Δ et y sont aussi imaginaires purs et y ne peut être réel que s'il s'annule. La seule valeur de m rendant x et y réels tous les deux est $m = -i$; on a alors $(x, y) = (1, 0)$.

Septembre 2013

Question 1. Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{cases} (a-1)x + (a-2)y + az = 2a+1 \, , \\ ax + 2az = 6a - 2 \, , \\ x + (2-a)y + az = 4a - 3 \, . \end{cases}$$

Solution. On peut d'abord observer que la deuxième équation est inutile, puisque c'est la somme des deux autres. En remplaçant la première équation par la différence de la première et de la troisième, on obtient:

$$\begin{cases} (a-2)x + 2(a-2)y = -2(a-2) \, , \\ x + (2-a)y + az = 4a - 3 \, . \end{cases}$$

- Si $a = 2$, la première équation disparaît et le système se réduit à $x + 2z = 5$.
  Les solutions sont $x = 5 - 2\lambda$, $y = \mu$, $z = \lambda$.

- Si $a = 0$, le système devient:

  $$\begin{cases} x + 2y = -2 \, , \\ x + 2y = -3 \, . \end{cases}$$

  Il n'admet pas de solution.

- Dans les autres cas, c'est-à-dire quand $a(a-2) \neq 0$, le système devient:

  $$\begin{cases} x + 2y = -2 \, , \\ x + (2-a)y + az = 4a - 3 \, . \end{cases}$$

  les solutions sont $y = \lambda$, $x = -2 - 2\lambda$, $az = 4a - 3 + 2 + 2\lambda - (2-a)\lambda$,
  c'est-à-dire: $z = \lambda + \frac{4a-1}{a}$; λ et μ sont des paramètres quelconques.

Question 2. Soit P le polynôme

$$P(x) \;=\; x^4 - 6x^3 + 14x^2 + \alpha x + \beta\,,$$

Calculer les nombres α et β ainsi que les quatre racines de P, sachant que la somme de deux des racines vaut 2 et que le produit des deux autres racines vaut 3.

Solution. Le polynôme peut se récrire en:

$$(x^2 - 2x + \lambda)(x^2 - \mu x + 3)\,,$$

où λ et μ sont des nombres à déterminer. En développant le produit, on obtient:

$$x^4 - (2+\mu)x^3 + (3 + 2\mu + \lambda)x^2 - (6 + \lambda\mu)x + 3\lambda\,.$$

En identifiant les termes en x^3, on obtient $\mu = 4$. On identifie ensuite les termes en x^2, ce qui donne $\lambda = 3$. On identifie enfin les termes en x et les termes indépendants, ce qui donne $\alpha = -18$ et $\beta = 9$. Le polynôme factorisé se récrit en:

$$(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 3)\,,$$

d'où on déduit immédiatement l'ensemble des racines:

$$\{1 - i\sqrt{2}\,,\; 1 + i\sqrt{2}\,,\; 1\,,\; 3\}\,.$$

Question 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante:

$$\log_2(x+1) + 4\log_4(x) < 1\,.$$

Solution. On note d'abord que x doit être strictement positif. L'inéquation se récrit successivement en:

$$\log_2(x+1) + \log_4(x^4) < 1\,,$$

$$\log_2(x+1) + \log_2(x^2) < 1\,,$$

$$\log_2[x^2(x+1)] < 1\,,$$

$$x^2(x+1) < 2\,,$$

$$x^3 + x^2 < 2\,.$$

L'ensemble des solutions est donc l'intervalle ouvert $]0:1[$.

Juillet 2014

Question 1. Pour quelles valeurs du paramètre réel m le polynôme

$$X^2 + (2m - 1)X + m^2$$

admet-il deux racines positives dont l'une est le triple de l'autre? Quelles sont les racines?

Solution. En notant a et $3a$ les deux racines, on a:

$$(X - a)(X - 3a) = X^2 - 4aX + 3a^2 = X^2 + (2m - 1)X + m^2\,,$$

d'où on tire $2m - 1 = -4a$ et $3a^2 = m^2$. On élimine m en égalant les valeurs de $4m^2$ tirées de ces deux égalités; cela donne:

$$1 - 8a + 16a^2 = 12a^2 \quad \text{ou encore} \quad 1 - 8a + 4a^2 = 0\,,$$

équation dont les racines (positives toutes les deux) sont

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\,.$$

Les valeurs de $m = (1 - 4a)/2$ correspondantes sont

$$-\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}\,.$$

Question 2. Résoudre l'inéquation suivante:

$$(x - 1)\sqrt{x + 4} < 2 - 4x\,.$$

Solution. La condition d'existence est $x \geq -4$; on se limite donc au domaine $[-4 : +\infty[$. Ce domaine se partitionne comme suit:

- Si $-4 \leq x < 1/2$, le membre de gauche est négatif et celui de droite est strictement positif; l'inéquation est vérifiée.
- Si $1/2 \leq x < 1$, les deux membres sont négatifs.
- Si $x \geq 1$, le membre de gauche est positif et le membre de droite est strictement négatif; l'inéquation n'est pas vérifiée.

Seul le deuxième cas nécessite une étude plus poussée. Dans l'intervalle $[1/2 : 1[$, l'inéquation se récrit en

$$\sqrt{x + 4} > \frac{4x - 2}{1 - x} \quad \text{ou encore} \quad (x + 4)(1 - x)^2 > (4x - 2)^2\,,$$

ce qui se simplifie en

$$x^3 - 14x^2 + 9x = x(x^2 - 14x + 9) = x(x - a)(x - b) > 0\,,$$

avec $a = 7 - 2\sqrt{10}$ et $b = 7 + 2\sqrt{10}$. On note que a est dans l'intervalle $[1/2 : 1[$; on a $a \simeq 0.675$. L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $[-4 : 7 - 2\sqrt{10}[$.

Septembre 2014

Question 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(1+z^2)^3 \;=\; (1-z^2)^3\,.$$

Solution. En observant qu'aucune solution ne peut vérifier $1-z^2=0$, on récrit l'équation en

$$\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)^3 \;=\; 1\,.$$

Cela se récrit en

$$\frac{1+z^2}{1-z^2} \;=\; \lambda\,,$$

où λ est une des trois racines cubiques de l'unité. En choisissant $\lambda=1$, on obtient la première solution $z=0$; en choisissant $\lambda = \operatorname{cis}(\pm 2\pi/3) = (-1\pm i\sqrt{3})/2$, on obtient

$$z^2 = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} = \pm i\sqrt{3}\,.$$

Ces deux valeurs pour z^2 donnent lieu à quatre valeurs pour z:

$$z = \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}(\pm 1 \pm i)}{2}\,;$$

l'équation proposée a donc cinq solutions.

Question 2. Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{cases} ax+y+z &= 1\\ x+ay+z &= 1\\ x+y+az &= 1\end{cases}$$

Solution. Le déterminant du système vaut

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}$$

$$= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & a-1 & 0\\ 1 & 0 & a-1\end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2\,.$$

Pour $a=-2$, le système est impossible car la somme des trois équations donne

$$0x+0y+0z=3\,.$$

Pour $a=1$, le système est doublement indéterminé; l'ensemble des triplets (x,y,z) solutions du système est:

$$\{(\lambda,\mu,1-\lambda-\mu) : \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}\,.$$

Pour les autres valeurs de a, le système admet une solution unique:

$$x=y=z=\frac{1}{a+2}\,.$$

Juillet 2015

Question 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante:

$$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-1} \ \leq \ x\,.$$

Solution. L'inéquation se récrit en

$$\sqrt{(x-1)(x+1)} \ \leq \ x-|x-2|\,,$$

d'où la condition d'existence $x \in\,]-\infty:-1] \ \cup \ [1:+\infty[$. Le membre de droite est positif seulement dans l'intervalle $[1:+\infty[$, qui contiendra donc toutes les solutions éventuelles de l'inéquation. Dans cet intervalle, on peut élever au carré, ce qui donne

$$x^2-1 \ \leq \ x^2-2x|x-2|+x^2-4x+4\,,$$

c'est-à-dire

$$0 \ \leq \ x^2-2x(|x-2|+2)+5\,.$$

Dans l'intervalle $[1:2]$, on a $|x-2|=2-x$, ce qui permet une nouvelle simplification en

$$0 \ \leq \ 3x^2-8x+5$$

et puis en

$$0 \ \leq \ (3x-5)(x-1)\,.$$

Le membre de droite est positif dans l'ensemble $\{1\}\cup[5/3:2]$, qui sera inclus dans l'ensemble des solutions.
Dans l'intervalle $[2:+\infty[$, on a $|x-2|=2-x$, ce qui permet une simplification en

$$0 \ \leq \ -x^2+5\,,$$

Le membre de droite est positif dans le sous-intervalle $[2:\sqrt{5}]$.
En conclusion, l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est l'ensemble $\{1\}\cup[5/3:\sqrt{5}]$.

Question 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^8-2z^4\cos a+1=0\,,$$

dans laquelle a est un paramètre réel.

Solution. On pose d'abord $Z=z^4$; l'équation

$$Z^2-2Z\cos a+1=0$$

admet les deux solutions complexes conjuguées $\cos a \pm i\sin a$, que l'on écrit aussi $\operatorname{cis}(\pm a)$. Les huit solutions de l'équation initiale sont les racines quatrièmes de ces nombres, c'est-à-dire

$$\operatorname{cis}\frac{\pm a+2k\pi}{4} : k=0,1,2,3\,.$$

Septembre 2015

Question 1. Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+y-z &=& -1 \\ -x+ay+z &=& -1 \\ ax+ay+z &=& a \end{array}\right.$$

Solution.
Le déterminant du système vaut $a^2+2a+1=(a+1)^2$; il s'annule pour $a=-1$. Dans ce cas, le système se récrit en

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+y-z &=& -1 \\ -x-y+z &=& -1 \\ -x-y+z &=& -1 \end{array}\right.$$

Des deux premières équations on déduit par addition $x=1$ et par soustraction on déduit $y=z$; le système est simplement indéterminé et le triplet solution est $x=1, y=\lambda, z=-\lambda$.
Si $a\neq -1$, on a une solution unique, qui est $x=1, y=-1, z=a$.

Question 2. On donne les matrices réelles

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 3d \end{pmatrix},$$

où a, b, c et d sont des nombres réels, avec $d>c>0$.
On demande de déterminer a, b, c et d sachant que

$$BA^{-1}X=C\,,\ 9a^2d^2+b^2c^2-6abcd=36 \text{ et que } 2\log_2 c+\log_2 d=4\,.$$

Solution. On obtient successivement

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ BA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ BA^{-1}X=\begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix},$$

d'où on tire $a=1$ et $b=3$, puis $9d^2+9c^2-18cd=36$, ce qui se réduit à $|d-c|=2$ et enfin à $d=c+2$.
On a en plus $2\log_2 c+\log_2 d=\log_2 c^2d=4$; $c^2d=2^4=16$, d'où $c=2$ et $d=4$.

Juillet 2016

Question 1. Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $x^8 + 4$.

Solution. L'équation $x^8 + 4 = 0$ peut se récrire $x^8 = 4 \operatorname{cis} \pi$. En posant $\rho = \sqrt[8]{4} = \sqrt[4]{2}$, l'ensemble des huit solutions complexes peut s'écrire $\{\rho \operatorname{cis}[(2k+1)\pi/8] : k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
En tenant compte de l'égalité

$$(x - \rho \operatorname{cis} \alpha)(x - \rho \operatorname{cis}(-\alpha)) = (x^2 - 2\rho\, x \cos\alpha + \rho^2)\,,$$

valable pour tous réels ρ et α et pour tout complexe x, la factorisation demandée s'écrit:

$$(x^2 - 2\sqrt[4]{2}\, x\cos(\pi/8) + \sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt[4]{2}\, x\cos(3\pi/8) + \sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt[4]{2}\, x\cos(5\pi/8) + \sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt[4]{2}\, x\cos(7\pi/8) + \sqrt{2})\,.$$

On peut aussi utiliser les égalités

$$2\cos(\pi/8) = \sqrt{2+\sqrt{2}} = -2\cos(7\pi/8) \quad \text{et} \quad 2\cos(3\pi/8) = \sqrt{2-\sqrt{2}} = -2\cos(5\pi/8)\,;$$

cela permet de récrire la factorisation en

$$(x^2 - \sqrt[4]{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}x + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt[4]{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}x + \sqrt{2})(x^2 + \sqrt[4]{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}x + \sqrt{2})(x^2 + \sqrt[4]{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}x + \sqrt{2})\,,$$

et enfin en

$$(x^2 - \sqrt{2\sqrt{2}+2}\, x + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2\sqrt{2}-2}\, x + \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2\sqrt{2}-2}\, x + \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2\sqrt{2}+2}\, x + \sqrt{2})\,.$$

Remarque. On utilise la formule $1 + \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha$ pour obtenir la valeur de $\cos(k\pi/8)$ en fonction de celle de $\cos(k\pi/4)$.

Variante élémentaire, plus directe. On observe d'abord ceci:

$$x^8 + 4 = x^8 + 4x^4 + 4 - 4x^4 = (x^4+2)^2 - (2x^2)^2 = (x^4 + 2x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 2)\,.$$

On achève la factorisation en utilisant ceci:

$$x^4 \pm 2x^2 + 2 = (x^2 + \sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2} \mp 2)x^2 = (x^2 + \sqrt{2\sqrt{2} \mp 2}\, x + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2\sqrt{2} \mp 2}\, x + \sqrt{2})\,.$$

Question 2. Résoudre le système suivant, dans lequel m est un paramètre réel:

$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ m^3 x + (2m-1)y = m^3 + 1 \end{cases}$$

Solution. Le déterminant du système est:

$$\begin{vmatrix} m & 1 \\ m^3 & 2m-1 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m^2 & 2m-1 \end{vmatrix} = -m(m^2 - 2m + 1) = -m(m-1)^2\,;$$

il s'annule pour $m = 0$ et pour $m = 1$.
Si $m = 0$, le système se réduit aux équations $y = 1$ et $-y = 1$ et est clairement impossible.
Si $m = 1$, le système se réduit aux équations $x + y = 2$ et $x + y = 2$; il est indéterminé et $(x, y) = (\lambda, 2 - \lambda)$ est une solution quelle que soit la valeur du paramètre λ.
Si m est un réel distinct de 0 et de 1, le système admet une solution unique, qui est:

$$x = \frac{(m+1)(m-2)}{m(m-1)} \quad \text{et} \quad y = \frac{m+1}{m-1}\,.$$

Septembre 2016

Question 1. Un polynôme réel $f(x)$ et son polynôme dérivé $f'(x)$ s'annulent tous les deux en $x = 2$. Montrer que $f(x)$ est un multiple de $(x-2)^2$.

Solution. Il existe un polynôme unique $q(x)$ et deux réels uniques a et b tels que $f(x) = q(x)(x-2)^2 + a(x-2)+b$. On a alors $f'(x) = [q'(x)(x-2)+2q(x)](x-2)+a$. De $f'(2) = 0$ on tire $a = 0$; ensuite, de $f(2) = 0$ on tire $b = 0$.

Question 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante:

$$\frac{1}{4x^2-8x+3} \;\le\; \frac{2}{4x^2-8x+4}\,.$$

Solution. L'inéquation peut s'écrire:

$$\frac{1}{(2x-3)(2x-1)} \;\le\; \frac{2}{(2x-2)^2}\,.$$

La condition d'existence est $x \notin \{1/2,\,1,\,3/2\}$. On observe que le membre de droite est toujours positif dans son domaine d'existence; le membre de gauche est positif en dehors de l'intervalle $[1/2:3/2]$ et négatif dans l'intervalle $]1/2:3/2[$. On sait donc déjà que les intervalles $]1/2:1[$ et $]1:3/2[$ sont inclus dans l'ensemble des solutions.
En dehors de l'intervalle $[1/2:3/2]$, l'inéquation peut s'écrire

$$4x^2-8x+4 \;\le\; 2(4x^2-8x+3)\,,$$

c'est-à-dire $4x^2-8x+2 \ge 0$ ou encore

$$(2x-2-\sqrt{2})(2x-2+\sqrt{2}) \;\ge\; 0\,.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$]-\infty : 1-\frac{\sqrt{2}}{2}] \;\cup\;]1/2:1[\;\cup\;]1:3/2[\;\cup\; [1+\frac{\sqrt{2}}{2} : +\infty[\,.$$

Juillet 2017

Question 1. Calculer la valeur de l'expression

$$E = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha\,.$$

Suggestion. On peut voir dans l'expression à évaluer la partie imaginaire d'une autre expression facile à calculer.

Solution. L'expression réelle E est la partie imaginaire de l'expression complexe

$$C = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{cis} k\alpha\,.$$

(Ajouter la valeur 0 pour l'indice de sommation n'a pas d'importance puisque $\sin 0 = 0$.)
La formule de Moivre permet d'écrire

$$C = \sum_{k=0}^{n} (\operatorname{cis}\alpha)^k\,.$$

Les termes de cette somme forment une suite géométrique; on utilise donc la formule

$$\sum_{k=0}^{n} Z^k = \frac{1 - Z^{n+1}}{1 - Z}\,,$$

valable pour tout entier naturel n et tout complexe $Z \neq 1$.
On obtient ainsi, si α n'est pas un multiple de 2π,[8]

$$C = \frac{1 - (\operatorname{cis}\alpha)^{n+1}}{1 - \operatorname{cis}\alpha} = \frac{1 - \operatorname{cis}(n+1)\alpha}{1 - \operatorname{cis}\alpha} = \frac{1 - \cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha}{1 - \cos\alpha - i\sin\alpha}\,.$$

On applique alors la formule

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd) + i(-ad+bc)}{c^2+d^2}\,,$$

avec $a = 1 - \cos(n+1)\alpha$, $b = -\sin(n+1)\alpha$, $c = 1 - \cos\alpha$ et $d = -\sin\alpha$.
On a $c^2 + d^2 = 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2 - 2\cos\alpha$, d'où

$$E = \frac{-ad+bc}{c^2+d^2} = \frac{(1-\cos(n+1)\alpha)\sin\alpha - (1-\cos\alpha)\sin(n+1)\alpha}{2 - 2\cos\alpha}\,.$$

Remarque. Quelques manipulations supplémentaires permettraient d'obtenir la forme plus élégante

$$E = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,.$$

Commentaire. Trop de candidats ont oublié la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique; cette formule est pourtant une conséquence immédiate de l'égalité polynomiale évidente

$$Z^{n+1} - 1 \;=\; (Z-1)\sum_{k=0}^{n} Z^k\,.$$

[8] Si α est un multiple de 2π, on a $\sin k\alpha = 0$ et $E = 0$.

Question 2. Déterminer l'ensemble des valeurs (réelles) de a pour lesquelles l'énoncé

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x, \text{ si } x \geq a \text{ alors } x^2 - ax + 2 - a \geq 0}$$

est vrai.

Solution. Le graphe de la fonction polynomiale $P(x) = x^2 - ax + 2 - a$ est une parabole à concavité tournée vers le haut. La fonction atteint sa valeur minimale sur l'ensemble des réels en $x = a/2$, conformément à la théorie des polynômes du second degré.[9] Cette valeur est $2 - a - a^2/4$.

Si on se restreint au domaine $\{x : x \geq a\}$, on doit distinguer deux cas.

1. Si $a \leq 0$, alors $a/2$ appartient au domaine; l'énoncé est donc vrai si $2 - a - a^2/4 \geq 0$ et faux sinon. Le polynôme $Q(a) = 2 - a - a^2/4$ admet une racine positive (sans intérêt) et une racine négative qui est $-2(1+\sqrt{3})$. On en déduit que l'ensemble des valeurs négatives de a pour lesquelles l'énoncé est vrai est l'intervalle $[-2(1+\sqrt{3}) : 0]$.[10]

2. Si $a > 0$, alors $a/2$ n'appartient pas au domaine $\{x : x \geq a\}$; la fonction $P(x)$ est alors croissante sur ce domaine et atteint son minimum au point $x = a$; ce minimum vaut $2 - a$. On en déduit que l'ensemble des valeurs strictement positives de a pour lesquelles l'énoncé est vrai est l'intervalle $]0 : 2]$.

Au final, l'ensemble demandé est donc l'intervalle $[-2(1+\sqrt{3}) : 2]$.

Commentaire. Trop de candidats ont mal lu la question, par exemple en omettant de tenir compte de la condition "si $x \geq a$" de l'encadré.

[9] Cette théorie dit notamment que la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ atteint son extremum en $x = -b/2a$; cet extremum est un maximum si $a < 0$ et un minimum si $a > 0$.

[10] On utilise à nouveau la théorie des polynômes du second degré: si a et c sont de signes contraires, la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet une racine négative et une racine positive; $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur des racines.

Septembre 2017

Question 1. Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{cases} ax+(a+1)y+(a+2)z = a\,, \\ (a-1)x+(a+3)y+(a+1)z = a-1\,, \\ (a+2)x-y+(2a+2)z = 4\,. \end{cases}$$

Solution. Le déterminant du système est:

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a-1 & a+3 & a+1 \\ a+2 & -1 & 2a+2 \end{vmatrix} \overset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 3(a+1) & a+1 & a+2 \\ 3(a+1) & a+3 & a+1 \\ 3(a+1) & -1 & 2a+2 \end{vmatrix} = 3(a+1)\begin{vmatrix} 1 & a+1 & a+2 \\ 1 & a+3 & a+1 \\ 1 & -1 & 2a+2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(L_2,L_3)\leftarrow(L_2-L_1,L_3-L_1)}{=} 3(a+1)\begin{vmatrix} 1 & a+1 & a+2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -a-2 & a \end{vmatrix} = 3(a+1)(2a-a-2) = 3(a+1)(a-2)\,.$$

Les racines du déterminant sont -1 et 2. On va donc distinguer trois cas: $a=-1$, $a=2$ et $a \notin \{-1,2\}$.

Dans le *premier* cas ($a=-1$), le système se réduit à

$$-x+z=-1\,,\ -2x+2y=-2\,,\ x-y=4\,.$$

et on voit que L_2+2L_3 donne $0=6$; le système proposé est impossible (c'est-à-dire qu'il n'admet aucune solution) quand $a=-1$.

Dans le *deuxième* cas ($a=2$), le système se réduit à

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=2\,, \\ x+5y+3z=1\,, \\ 4x-y+6z=4\,. \end{cases}$$

De L_3 on tire $y=4x+6z-4$, valeur que l'on reporte dans L_1 et L_2, ce qui donne respectivement $14x+22z=14$ et $21x+33z=21$; ces équations se réduisent toutes deux à $7x+11z=7$; le système proposé est indéterminé (c'est-à-dire que l'ensemble des solutions est infini) quand $a=2$. On pose $x=\lambda$, réel quelconque; on déduit immédiatement $z=(7-7\lambda)/11=-7(\lambda-1)/11$ puis $y=4\lambda-4+6(7-7\lambda)/11=(\lambda-1)[4-42/11]=2(\lambda-1)/11$. L'ensemble des solutions (x,y,z) quand $a=2$ est donc

$$\left\{\left(\lambda\,,\ \frac{2(\lambda-1)}{11}\,,\ \frac{-7(\lambda-1)}{11}\right) : \lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

Dans le *troisième* cas ($a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$), le déterminant est non nul et le système admet une solution unique, donnée par les formules de Cramer. Après simplification, on obtient

$$x=\frac{6a+8}{3(a+1)}\,,\ y=\frac{2}{3(a+1)}\,,\ z=-\frac{3a+1}{3(a+1)}\,.$$

Question 2.
Décomposer dans $\mathbb{C}$ le polynôme z^4+1 en un produit du type

$$(z^2+b_1z+c_1)(z^2+b_2z+c_2)\,.$$

Si plusieurs possibilités existent, on les donnera toutes.

Solution. De $-1=\operatorname{cis}\pi$, on déduit la décomposition unique (à l'ordre des facteurs près) en facteurs du premier degré (dont le coefficient de z est 1):

$$z^4+1 \;=\; (z-\operatorname{cis}\frac{\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\frac{-\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\frac{-3\pi}{4})\,.$$

Les décompositions demandées s'obtiennent en groupant deux à deux les facteurs du premier degré. Si on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs, cela peut se faire de trois manières différentes. On a donc $z^4+1=P_1(z)P_2(z)=Q_1(z)Q_2(z)=R_1(z)R_2(z)$ avec

$$\begin{aligned}
P_1(z) &= (z-\operatorname{cis}\tfrac{\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\tfrac{-\pi}{4}) = z^2-\sqrt{2}z+1\,,\\
P_2(z) &= (z-\operatorname{cis}\tfrac{3\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\tfrac{-3\pi}{4}) = z^2+\sqrt{2}z+1\,,\\
Q_1(z) &= (z-\operatorname{cis}\tfrac{\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\tfrac{3\pi}{4}) = z^2-\sqrt{2}iz-1\,,\\
Q_2(z) &= (z-\operatorname{cis}\tfrac{-\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\tfrac{-3\pi}{4}) = z^2+\sqrt{2}iz-1\,,\\
R_1(z) &= (z-\operatorname{cis}\tfrac{\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\tfrac{-3\pi}{4}) = z^2-i\,,\\
R_2(z) &= (z-\operatorname{cis}\tfrac{-\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\tfrac{3\pi}{4}) = z^2+i\,.
\end{aligned}$$

Si on tient compte de l'ordre des facteurs, il y a six décompositions possibles.

Juillet 2018

Question 1. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$|x+1|+|x-2|<3\,.$$

Solution. Pour éliminer les valeurs absolues, il est commode de partitionner $\mathbb{R}$ en trois intervalles. Dans l'intervalle $]-\infty:-1[$, l'inéquation se récrit $-(x+1)-(x-2)<3$; elle se simplifie en $x>-1$ qui n'admet pas de solution (dans cet intervalle). Dans l'intervalle $[-1:2]$, l'inéquation se récrit $(x+1)-(x-2)<3$; elle se simplifie en $3<3$ qui n'admet pas de solution. Enfin, dans l'intervalle $]2:+\infty[$, l'inéquation se récrit $(x+1)+(x-2)<3$; elle se simplifie en $x<2$ qui n'admet pas de solution (dans cet intervalle). En conclusion, l'inéquation n'admet aucune solution.
Remarque. Dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation $|z-z_1|+|z-z_2|=r|z_1-z_2|$ forment une ellipse de foyers z_1 et z_2 si $r>1$ et le segment de droite $\overline{z_1z_2}$ si $r=1$; il n'y a pas de solution si $r<1$. Les solutions de l'inéquation stricte associée composent l'intérieur de l'ellipse si $r>1$; il n'y a pas de solution dans les deux autres cas. La question posée correspond au cas particulier $z_1=-1$, $z_2=2$ et $r=1$ donc l'inéquation proposée n'admet pas de solution (ni dans $\mathbb{C}$ ni a fortiori dans $\mathbb{R}$).

Question 2.
a) A quelles conditions sur les paramètres réels a, b et c le polynôme X^4+aX^2+bX+c est-il divisible par X^2+X+1?
b) A quelle condition sur les paramètres réels p et q le polynôme X^3+pX+q admet-il une racine double? Cette racine est-elle toujours réelle?

Solution, partie a. Si $X^4+aX^2+bX+c=(X^2+X+1)Q(X)$, le fait que les coefficients des termes de degrés respectifs 4, 3 et 0 soient 1, 0 et c impose que le polynôme du second degré $Q(x)$ soit X^2-X+c.

Le produit vaut alors $X^4+cX^2+(c-1)X+c$, ce qui impose les conditions $a=c$ et $b=c-1$.

Variante. En divisant formellement X^4+aX^2+bX+c par X^2+X+1, on obtient le quotient X^2-X+a et le reste $(b+1-a)X+(c-a)$. Le reste devant être nul, on a les conditions $b+1=a$ et $c=a$, équivalentes aux précédentes.

Solution, partie b. L'absence de terme du second degré indique que la somme des trois racines du polynôme est nulle donc, si a est racine double, le polynôme admet aussi une racine simple qui doit être $-2a$ et on a

$$X^3+pX+q=(X-a)^2(X+2a)=X^3-3a^2X+2a^3\,,$$

d'où on tire $p=-3a^2$ et $q=2a^3$, ou encore $p^3=-27a^6$ et $q^2=4a^6$. La condition demandée est donc $4p^3+27q^2=0$. La racine simple $-2a$ et la racine double a sont réelles: on a $a=-3q/2p$.
Cas particulier. Si $p=0$, on a aussi $q=0$; le polynôme admet alors la racine triple nulle.
Remarque. Le développement ci-dessus a montré que l'égalité $4p^3+27q^2=0$ était une condition *nécessaire* à l'existence d'une racine double (ou triple) pour le polynôme proposé mais cette condition est aussi *suffisante.* Le produit $(X+3q/2p)(X+3q/2p)(X-3q/p)$ est le polynôme $X^3-27q^2X/4p^2-27q^3/4p^3$ qui, si l'on tient compte de l'égalité $4p^3=-27q^2$, se réduit au polynôme proposé. On peut aussi, si x_1,x_2,x_3 sont les racines du polynôme, se servir des égalités $0=x_1+x_2+x_3$, $p=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ et $q=-x_1x_2x_3$ pour obtenir l'égalité $4p^3+27q^2=-(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$, qui rend évident le fait que la condition est nécessaire et suffisante.

Septembre 2018

Question 1. Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 1\,, \\ x + ay + az = a\,, \\ ax + a^2 y + a^3 z = a^3\,. \end{cases}$$

Solution. La troisième équation se réduit à $0 = 0$ si $a = 0$ ce qui nous incite à traiter d'abord ce cas particulier, pour lequel les deux premières équations se réduisent à $x = 1$ et $x = 0$ respectivement. Le système est donc impossible dans ce cas.

Dans les autres cas ($a \neq 0$), le système se réduit à

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 1\,, \\ x + ay + az = a\,, \\ x + ay + a^2 z = a^2\,. \end{cases}$$

Le déterminant du système s'annule toujours puique ses première et troisième lignes sont égales. On distingue trois cas.

Premier cas. Si $a^2 \neq 1$, les première et troisième équations sont incompatibles et le système n'admet pas de solution.

Deuxième cas. Si $a = 1$, le système se réduit à $x + y + z = 1$ et est doublement indéterminé. Pour tous réels λ et μ, le triplet $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu)$ est solution.

Troisième cas. Si $a = -1$, le système se réduit à:

$$\begin{cases} x - y + z = 1\,, \\ x - y - z = -1\,, \\ x - y + z = 1\,. \end{cases}$$

Il est alors simplement indéterminé; pour tout réel λ, le triplet $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, 1)$ est solution.

Question 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + (\operatorname{cis}\theta)^2|z| = 0$, dans laquelle θ est un paramètre réel. Quel est l'ensemble des valeurs possibles de $|z|$? Donner la forme algébrique des solutions éventuelles dans le cas $\theta = 0$.
Rappel. L'expression $\operatorname{cis}\theta$ est une abréviation de $(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Solution. On peut écrire $z^3 = -(\operatorname{cis}\theta)^2|z| = -(\operatorname{cis}2\theta)|z| = (\operatorname{cis}(2\theta + \pi))|z|\,.$
En prenant le module des deux membres, on obtient $|z^3| = |z|^3 = |z|$, ce qui impose $|z| \in \{0, 1\}$. On observe immédiatement que 0 est solution de l'équation proposée et que toute autre solution éventuelle peut s'écrire $z = \operatorname{cis}\alpha$, où α est solution de l'équation $(\operatorname{cis}\alpha)^3 = -(\operatorname{cis}\theta)^2$, qui peut se récrire $\operatorname{cis}3\alpha = \operatorname{cis}(2\theta + \pi)$, et encore $\alpha = [2\theta + (2k + 1)\pi]/3$, où k est un entier quelconque.
Dans le cas général, l'ensemble des quatre solutions est

$$\{0, \operatorname{cis}\frac{2\theta - \pi}{3}, \operatorname{cis}\frac{2\theta + \pi}{3}, -\operatorname{cis}\frac{2\theta}{3}\}\,.$$

Dans le cas particulier $\theta = 0$, l'ensemble des solutions est donc

$$\{0, \operatorname{cis}\frac{-\pi}{3}, \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}, -1\}$$

ou encore

$$\{0, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, -1\}\,.$$

Juillet 2019

Question 1. Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq p \leq n$, on a

$$\sum_{i=0}^{p} C_n^i C_{n-i}^{p-i} = 2^p C_n^p \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_n^i C_{n-i}^{p-i} = 0\,.$$

Suggestion. On montrera d'abord $C_n^i C_{n-i}^{p-i} = C_p^i C_n^p$, pour tous naturels i, p, n tels que $i \leq p \leq n$.

Solution. La formule

$$C_u^k = \frac{u!}{k!\,(u-k)!}$$

permet le développement suivant:

$$C_n^i C_{n-i}^{p-i} = \frac{n!\;(n-i)!}{i!\,(n-i)!\;(p-i)!\,(n-p)!} = \frac{n!\,p!}{i!\,p!\,(p-i)!\,(n-p)!} = \frac{p!\;n!}{i!\,(p-i)!\;p!\,(n-p)!} = C_p^i C_n^p\,.$$

Ce développement permet de réduire les inégalités à démontrer à:

$$\sum_{i=0}^{p} C_p^i C_n^p = 2^p C_n^p \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i C_n^p = 0\,,$$

puis, en divisant chaque fois les deux membres par C_n^p, à:

$$\sum_{i=0}^{p} C_p^i = 2^p \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i = 0\,.$$

Ces dernières égalités s'obtiennent à partir de la formule de Newton:

$$\sum_{i=0}^{p} C_p^i x^i = (1+x)^p\,,$$

en remplaçant x par 1 pour obtenir l'égalité de gauche, et par -1 pour obtenir celle de droite.

Question 2. On considère l'expression suivante, dans laquelle n est un paramètre entier naturel:

$$\frac{(2+i\sqrt{12})^7}{(\sqrt{3}-i)^n}\,.$$

On demande sa valeur, sous forme algébrique et sous forme trigonométrique, quand n vaut 16 et quand n vaut 17.

Solution. En notant que $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, on voit que le numérateur de la fraction peut s'écrire $(4\,\text{cis}\,[\pi/3])^7$ et le dénominateur peut s'écrire $(2\,\text{cis}\,[-\pi/6])^n$. Le nombre lui-même peut donc s'écrire

$$2^{14-n}\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{3} + \frac{n\pi}{6}\right) = 2^{14-n}\,\text{cis}\left(\frac{(14+n)\pi}{6}\right)\,.$$

Pour $n = 16$, ce nombre peut s'écrire $2^{-2}\text{cis}\,(5\pi) = \dfrac{\text{cis}\,(\pi)}{4} = -\dfrac{1}{4}$.
Pour $n = 17$, ce nombre peut s'écrire:

$$2^{-3}\,\text{cis}\left(\frac{31\pi}{6}\right) = 2^{-3}\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}+i}{16}\,.$$

Septembre 2019

Question 1. Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci, définie par:

$$F_0 = 0\,,\ F_1 = 1 \text{ et } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pour } n \geq 2\,.$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 \;=\; F_n\, F_{n+1}\,.$$

Solution. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, la somme du membre de gauche comporte le seul terme $F_0^2 = 0$, tandis que le membre de droite vaut $F_0 F_1 = 0$.
Si on suppose l'égalité vraie pour une certaine valeur de n (hypothèse de récurrence), on a le développement suivant:

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_i^2 \;=\; \left(\sum_{i=0}^{n} F_i^2\right) + F_{n+1}^2 \;=\; F_n\, F_{n+1} + F_{n+1}^2 \;=\; F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \;=\; F_{n+1}F_{n+2}\,,$$

qui établit l'égalité pour la valeur suivante $n + 1$.

Question 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante, dans laquelle m est un paramètre réel:

$$\frac{1}{x-2} \;=\; \frac{2-m}{7x - 2x^2 - 6}\,. \tag{10}$$

Résoudre ensuite l'inéquation associée, obtenue en remplaçant le symbole "=" par le symbole "$\leq$".

Solution. On observe d'abord que l'équation peut se réécrire en

$$\frac{1}{x-2} \;=\; \frac{m-2}{(x-2)(2x-3)}\,.$$

et que son domaine d'existence est $D = \mathbb{R} \setminus \{3/2,\, 2\}$. Dans ce domaine, l'équation peut se simplifier en $2x - 3 = m - 2$, dont l'unique solution est $x = (m+1)/2$, si cette valeur appartient au domaine D, et donc si $m \notin \{2, 3\}$. Pour $m = 2$ comme pour $m = 3$, l'équation n'admet pas de solution.

Pour l'inéquation associée, le même domaine d'existence s'applique. Les points $x = 3/2$, $x = 2$ et $x = (m+1)/2$ déterminent sur la droite réelle des intervalles dans lesquels l'inéquation est ou n'est pas vérifiée. Si S désigne l'ensemble des solutions de l'inéquation, on a les résultats suivants:

- Si $m < 2$, alors $S = \left]-\infty : \dfrac{m+1}{2}\right] \;\cup\; \left]\dfrac{3}{2} : 2\right[$;
- Si $m = 2$, alors $S = \left]-\infty : \dfrac{3}{2}\right[\;\cup\; \left]\dfrac{3}{2} : 2\right[$;
- Si $2 < m < 3$, alors $S = \left]-\infty : \dfrac{3}{2}\right[\;\cup\; \left[\dfrac{m+1}{2} : 2\right[$;
- Si $m = 3$, alors $S = \left]-\infty : \dfrac{3}{2}\right[$;
- Si $m > 3$, alors $S = \left]-\infty : \dfrac{3}{2}\right[\;\cup\; \left]2 : \dfrac{m+1}{2}\right]$.