Question d'algèbre, avril 2021. Soit P_a le polynôme défini par:

$$P_a(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax - 8\,.$$

1. Si P_a est divisible par le polynôme $Q(x) = x^2 + 2$, quelle est la valeur du paramètre a? Pour cette valeur de a, quelles sont les racines réelles du polynôme P_a ?
2. Le polynôme P_{-12}, obtenu en fixant $a = -12$, n'admet que des racines entières. Quelle est la factorisation de P_{-12} ?

Solution. Diviser un polynôme pA (dividende) par un polynôme non nul pB (diviseur) signifie trouver les polynômes uniques pQ (quotient) et pR (reste) tels que $pA = pB * pQ + pR$, où le degré de pR est strictement inférieur au degré de pB.[1] On dit aussi que pA est divisible par pB si pR est nul.
La division de P_a par Q donne:

$$P_a(x) = (x^2 + 2)(x^2 + 3x - 4) + (a - 6)x\,.$$

La valeur qui annule le reste est $a = 6$; de $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$ on déduit la factorisation:

$$P_6(x) = (x^2 + 2)(x - 1)(x + 4)\,;$$

les racines réelles sont -4 et 1. Un autre moyen de résoudre ce problème est d'écrire

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax - 8 = (x^2 + 2)(bx^2 + cx + d)\,,$$

de développer le produit et d'identifier les termes de même degré; on trouve $(a, b, c, d) = (6, 1, 3, -4)$.

Ensuite, on sait que le produit des quatre racines (répétitions éventuelles comprises) du polynôme P_a est -8.[2] Si P_{-12} n'admet que des racines entières, elles doivent nécessairement se trouver dans l'ensemble $\{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$ des diviseurs de -8. On voit que les racines sont $-1, 2, -2$ (l'une d'elles doit être double) et on trouve alors facilement la factorisation demandée:

$$P_{-12}(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)^2\,.$$

Remarques.

1. Une note telle que 6+7 signifie 6/10 pour la sous-question 1 et 7/10 pour la sous-question 2.
2. La sous-question 2 a été en général mieux faite que la sous-question 1.
3. Une bonne copie comporte des phrases explicatives, pas seulement des équations et des tableaux.
4. Des réponses sans justification, même correctes, sont insuffisantes.
5. Si vous avez trouvé $a = 6$, factoriser $x^2 + 3x - 4$ suffit à la détermination des racines; appliquer la méthode de Horner à $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$ est une perte de temps.
6. Il n'est pas évident, même pour une personne expérimentée, d'éviter d'emblée toute erreur de calcul. Cependant, ne pas détecter et corriger de telles erreurs quand cela peut se faire simplement et rapidement (comme ici) est une négligence à éviter.
7. Résoudre les questions des années précédentes (disponibles depuis 2003) est une excellente préparation. Notez que, en 2021, les systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues avec un paramètre réel ne font pas partie de la matière de l'examen d'admission.

[1] Cas particulier: si pB est de degré 0 (scalaire non nul), pR est toujours le polynôme nul, dont on considère généralement qu'il n'a pas de degré.

[2] Le produit des n racines du polynôme $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) est $(-1)^n a_0/a_n$.