Algèbre, juillet 2020

Question 1. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$6^{4x} - 36^{x+1} - 160 = 0\,.$$

Solution. L'équation se réécrit en

$$36^{2x} - 36^{x+1} - 160 = 0\,.$$

En posant $36^x = X$ on obtient

$$X^2 - 36X - 160 = 0$$

ou encore

$$(X - 40)(X + 4) = 0\,.$$

Le second facteur ne s'annule jamais puisqu'il est la somme de deux nombres strictement positifs. Le premier facteur s'annule si $X = 40 = 36^x$, c'est-à-dire si

$$x = \frac{\log 40}{\log 36} \text{ (solution unique)}\,.$$

Cette réponse, proche de 1.03, est indépendante de la base choisie pour les logarithmes; elle peut s'écrire de différentes manières, par exemple $\log_{36} 40$ ou encore $(\log_6 40)/2$.

Remarque. Quelques candidats ont été surpris par cette question en notant que suite à la crise sanitaire, l'étude des fonctions exponentielle et logarithme avait été supprimée de la matière d'analyse. L'analyse (fonctions, limites, continuité, dérivées, primitives, intégrales, ...) et l'algèbre (équations, inéquations, polynômes, ...) sont des disciplines distinctes, faisant l'objet de listes distinctes. La présente question rentre dans le cadre de l'item *résolution d'équations réductibles au deuxième degré, bicarrées, irrationnelles*, qui subsistait dans la liste réduite des matières à étudier en algèbre. Les compétences nécessaires à sa résolution sont généralement acquises avant la dernière année des études secondaires. Pour des questions analogues, on pourra consulter le fichier des questions des années antérieures (septembre 2011, septembre 2013).

Question 2. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \;\geq\; \sqrt{-x}+\frac{2|x|}{x}\,.$$

Solution. La présence du radical et des dénominateurs impose la restriction au domaine $\{x : x < 0\}$. Dans ce domaine, les deux membres de l'inéquation peuvent être simplifiés et cette inéquation peut se réécrire en:

$$\frac{x+2}{x-1} \;\geq\; \sqrt{-x}-2\,,$$

puis en:

$$2+\frac{x+2}{x-1} \;=\; \frac{3x}{x-1} \;\geq\; \sqrt{-x}\,.$$

Sur le domaine, les deux membres de l'inéquation sont positifs et on peut élever au carré, ce qui donne:

$$\frac{9x^2}{(x-1)^2} \;\geq\; -\,x\,,$$

qui se réécrit en:

$$x+\frac{9x^2}{(x-1)^2} \;=\; \frac{x^3+7x^2+x}{(x-1)^2} \;\geq\; 0\,,$$

et encore en:

$$x(x^2+7x+1) \;\geq\; 0\,,$$

puisque $(x-1)^2$ est strictement positif sur le domaine. En factorisant, on obtient

$$x(x-a)(x-b) \;\geq\; 0\,,$$

avec $2a = -7+\sqrt{45}$ et $2b = -7-\sqrt{45}$. En tenant compte de $b < a < 0$, l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle fermé $[b : a]$, soit approximativement $[-6.854 : -0.146]$.