Algèbre, septembre 2020

Question 1. Déterminez l'ensemble des valeurs réelles de r pour lesquelles l'énoncé

$$\textit{Pour tout réel } x \textit{ tel que } |x| < 1/2, \textit{ on a } 2rx^2 + (3r-2)x - 3 \leq 0$$

est vrai.

Solution. On observe d'abord que $2rx^2+(3r-2)x-3 = (2x+3)(rx-1)$. Dans l'intervalle $\{x : |x| < 1/2\}$, le premier facteur est toujours positif. Dans le même intervalle, le second facteur est toujours négatif si $-2 \leq r \leq 2$; il est parfois positif dans le cas contraire. L'ensemble cherché est donc l'intervalle $\{r : |r| \leq 2\}$.

Question 2. Soit une suite de nombres réels $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_1 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{n^2 u_n + 7}{n^2 + 2n + 1} \text{ pour } n \geq 1.$$

Montrez que pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_n = \frac{7n-5}{n^2}.$$

Première solution. On procède par récurrence. Pour le cas de base, on observe simplement que l'égalité à prouver se réduit à $2 = 2$ quand $n = 1$.
Pour le cas inductif, en remplaçant u_n par $(7n-5)/n^2$ dans l'expression définissant u_{n+1}, on obtient:

$$u_{n+1} = \frac{7n-5+7}{n^2+2n+1},$$

qui se réécrit en

$$u_{n+1} = \frac{7(n+1)-5}{(n+1)^2},$$

ce qui est exactement le résultat attendu et achève la démonstration.

Seconde solution. Si on pose $v_n = n^2 u_n$, les données du problème peuvent s'écrire

$$v_1 = 2 \text{ et } v_{n+1} = (n+1)^2 \frac{v_n + 7}{n^2+2n+1} = v_n + 7 \text{ pour } n \geq 1.$$

On voit que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une progression arithmétique de premier terme 2 et de raison 7, d'où on déduit immédiatement

$$v_n = 2 + 7(n-1) = 7n - 5 \text{ pour } n \geq 1,$$

et donc

$$u_n = \frac{7n-5}{n^2} \text{ pour } n \geq 1.$$