Algèbre, 1er juillet 2021

Question 1. Soit le polynôme P défini par $P(z) = z^6 + 3z^4 - z^3 - 3z$.

1. Décomposer le polynôme en facteurs du premier ou second degré.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Solution. On peut réécrire $P(z)$ en $(z^6 - z^3) + 3(z^4 - z)$ puis factoriser en $(z^2 + 3)(z^4 - z)$; le second facteur se décompose en $z(z^3 - 1)$ puis en $z(z-1)(z^2 + z + 1)$. L'équation devient :

$$(z^2 + 3)z(z-1)(z^2 + z + 1) \;=\; 0\,.$$

Les solutions de l'équation sont les racines des facteurs, c'est-à-dire :

$$-i\sqrt{3}\,,\; i\sqrt{3}\,,\; 0\,,\; 1\,,\; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\,,\; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\,.$$

Question 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} \;\leq\; \sqrt{x^2 - 8x + 20}\,.$$

Solution. Le réalisant (discriminant) du trinôme sous radical est strictement négatif donc le trinôme est strictement positif et le membre de droite est toujours défini et strictement positif. Le domaine d'existence de l'inéquation est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

L'ensemble $]-\infty : 1[\; \cup\; [2 : 3]$ est inclus dans l'ensemble des solutions car le membre de gauche y est négatif ou nul (2 et 3 étant les racines de $x^2 - 5x + 6$).

Il reste à étudier l'ensemble $]1 : 2[\; \cup\;]3 : +\infty[$ sur lequel les deux membres sont positifs; on peut donc élever au carré; on a:

$$\frac{(x^2 - 5x + 6)^2}{(x-1)^2} \;\leq\; x^2 - 8x + 20$$

ou encore:

$$(x^2 - 5x + 6)^2 \;\leq\; (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 8x + 20)\,,$$

ce qui se réduit à:

$$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36 \;\leq\; x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 48x + 20\,,$$

et enfin à

$$-12x \;\leq\; -16\,,$$

c'est-à-dire à $x \geq 4/3$. L'ensemble complet des solutions est donc:

$$]-\infty : 1[\; \cup\; [\frac{4}{3} : +\infty[\,.$$