SYST0002 – Introduction aux signaux et systèmes

Examen

9 janvier 2020

Consignes
- Durée : 4h.
- Une nouvelle feuille pour chacune des 4 questions.
- Indiquez votre nom, prénom et matricule sur chaque feuille.
- Appareils électroniques (calculatrice, GSM, etc.) non admis.

Justifiez toujours vos réponses.

Question 1 La dynamique de la synthèse d'une protéine à partir de son gène peut être étudiée par modélisation mathématique d'un système entrée-sortie où l'entrée est la concentration en gène actif g et la sortie la concentration en protéine p (Figure 1). Ce processus se déroule en 2 étapes. Le gène est d'abord transcrit en ARN messager (mRNA, de concentration m) selon un taux de transcription k_1. Le mRNA est alors soit dégradé avec un taux de dégradation d_1, soit traduit en protéine avec un taux de traduction k_2. La protéine peut ensuite elle-même être dégradée/utilisée avec un taux de dégradation d_2.

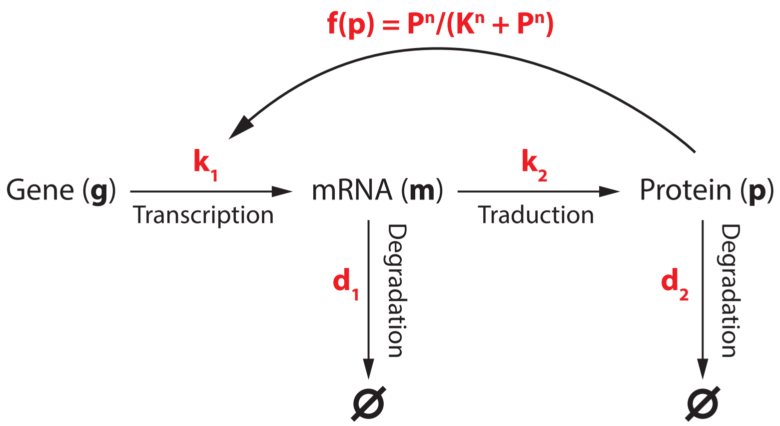


FIGURE 1 – Schéma équivalent de l'expression de gènes avec autoactivation.

Nous considérons par ailleurs le cas où la synthèse des protéines est régulée par un mécanisme appelé autoactivation : la protéine synthétisée stimule la transcription de son gène spécifique. Cela peut être modélisé par un taux de transcription qui dépend de la concentration en protéine p via une fonction $f(p) = p^n/(K^n + p^n)$, où K et n sont des paramètres régulants la dynamique de l'autoactivation.

En utilisant la loi d'action des masses, le schéma proposé à la figure 1 peut être transcrit en un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\dot{m} = gk_1\frac{p^n}{K^n+p^n} - d_1 m \quad (1)$$

$$\dot{p} = k_2 m - d_2 p, \quad (2)$$

où $gk_1 p^n/(K^n+p^n)$ modélise la dynamique de la transcription avec autoactivation, $d_1 m$ modélise la dégradation du mRNA, $k_2 m$ modélise la dynamique de la traduction, et $d_2 p$ modélise la dégradation de la protéine. Dans cet exercice, nous considérerons les valeurs suivantes pour les différents paramètres : $k_1 = k_2 = d_1 = d_2 = n = 1$, $K = 0.5$.

(i) Identifiez les entrées, sorties et états du système, ainsi que leurs domaines et images respectifs.

(ii) Le système est-il linéaire ? Temps-invariant ?

(iii) Tracez un plan de phase qualitatif du système comprenant les isoclines et identifiez le(s) point(s) d'équilibre du système graphiquement. Placez un vecteur associé au champ de vecteurs et de longueur qualitative dans les différents quadrants délimités par les isoclines. Pour faciliter la construction du plan de phase, utilisez $g = 1$ et travaillez uniquement dans la région physiologique (cf point (i)).

(iv) Calculez analytiquement le(s) point(s) d'équilibre du système en fonction de g.

(v) Déterminez analytiquement des critères de stabilité pour chaque point fixe en fonction de g.

(vi) Identifiez le comportement du système global en fonction de ces critères (en terme d'évolution temporelle et de convergence de la quantité de protéines synthétisées pour différentes valeurs de g).

(vii) Prouvez analytiquement que la convergence vers le(s) point(s) d'équilibre stable(s) sera toujours monotone.

Question 2 La sortie $y(t)$ d'un système LTI causal est liée à l'entrée $u(t)$ par l'équation suivante :

$$\dot{y}(t) + 5y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)z(t-\tau)d\tau - 2u(t)$$

où $z(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un sous-système.

(i) Dessinez le bloc-diagramme du système défini ci-dessus en utilisant un seul bloc intégrateur et un bloc pour le sous-système de réponse impulsionnelle $z(t)$.

(ii) Déterminez la fonction de transfert $H(s)$ du système.
Astuce : $Z(s)$ peut être présent dans l'expression de $H(s)$.

(iii) Avec $z(t) = e^{-2t}\mathbb{I}(t) + \delta(t)$, calculez $Z(s)$.

(iv) Utilisez l'expression de $Z(s)$ (obtenue au point (iii) pour simplifier la réponse obtenue de la fonction de transfert $H(s)$ (obtenue au point (ii)).

(v) Déterminez les zéros, les pôles et la région de convergence associée au système. Est-ce que le système est stable ? Justifiez votre réponse.

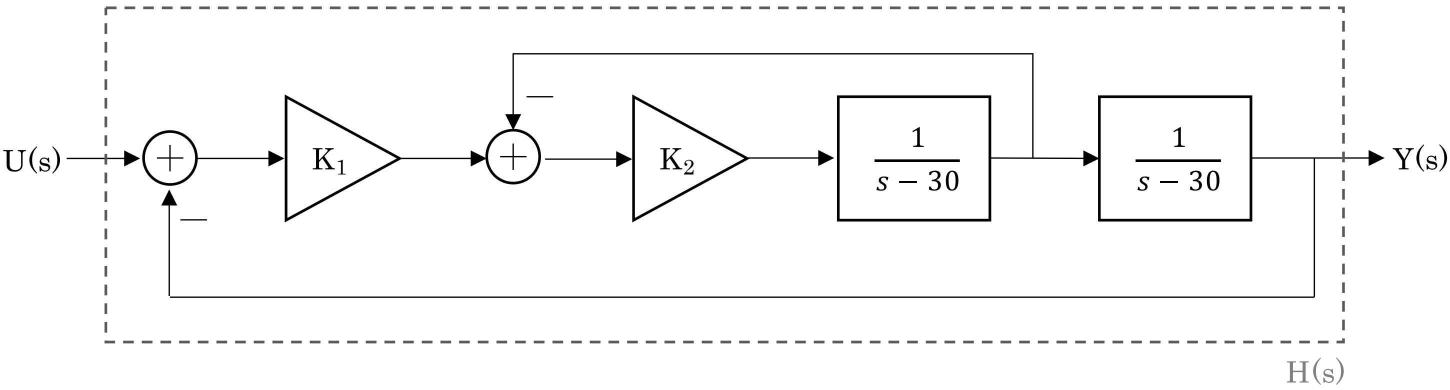
(vi) Le système a été défini à l'aide d'une équation intégro-différentielle donnée dans l'énocné. Utilisez les résultats précédemment obtenus pour déduire une équation différentielle entrée-sortie caractérisant tout votre système.

(vii) Dessinez le bloc diagramme associé au système sans faire intervenir z.

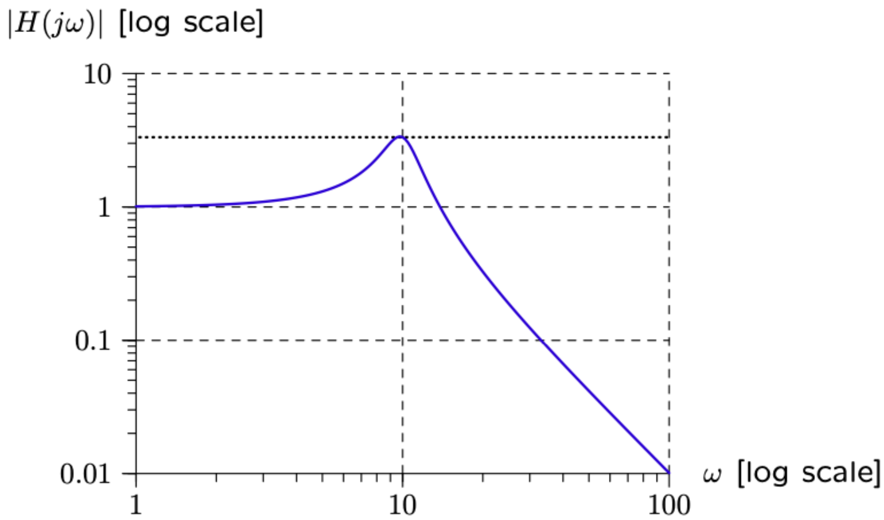
(viii) Calculez la réponse impulsionnelle associée au système. Sur base de l'expression obtenue, confirmez votre discussion concernant la stabilité de votre système faite au point (v).

(ix) Dessinez le bode diagramme en amplitude et en phase (version classique et non version simplifée) associée à la fonction transfert du système. Attention aux soins que vous portez à vos graphiques ; indiquez les labels, les unités et des valeurs indicatives rendant vos diagrammes clairs et sans confusion.

Question 3 Le bloc diagramme suivant illustre la relation entrée-sortie dans le domaine de Laplace (c-a-d la relation entre U(s) et Y(s)).



K_1 et K_2 sont des *gains* à déterminer de manière à rencontrer les contraintes imposées sur la fonction de transfert $H = Y/U$ telles que son diagramme de Bode en amplitude est donné par la figure suivante :



(i) En détaillant votre raisonnement, que valent K_1 et K_2 ?
Rappel : Le diagramme entrée-sortie est établi dans le domaine de Laplace. Les signaux sont donc les transformées de Laplace de l'entrée et sortie associées au domaine temporel. Les triangles représentent des gains, *ie.* des constantes qui multiplient les signaux et les blocs carré dans les carrés représentent des fonctions de transfert. Lorsque le bloc-diagramme fait intervenir un feedback, il suffit d'exprimer le signal correspondant à l'entrée moins la sortie.

(ii) Dessinez le diagramme de Bode en phase associée à la fonction de transfert obtenue précédemment et dont le diagramme en amplitude est donnée dans l'énoncé.

(iii) Le système reçoit un signal d'entrée $u(t)$ qui peut se décomposer en deux entrées $u_1(t)$ et $u_2(t)$ comme illustré à la figure ci-dessous :

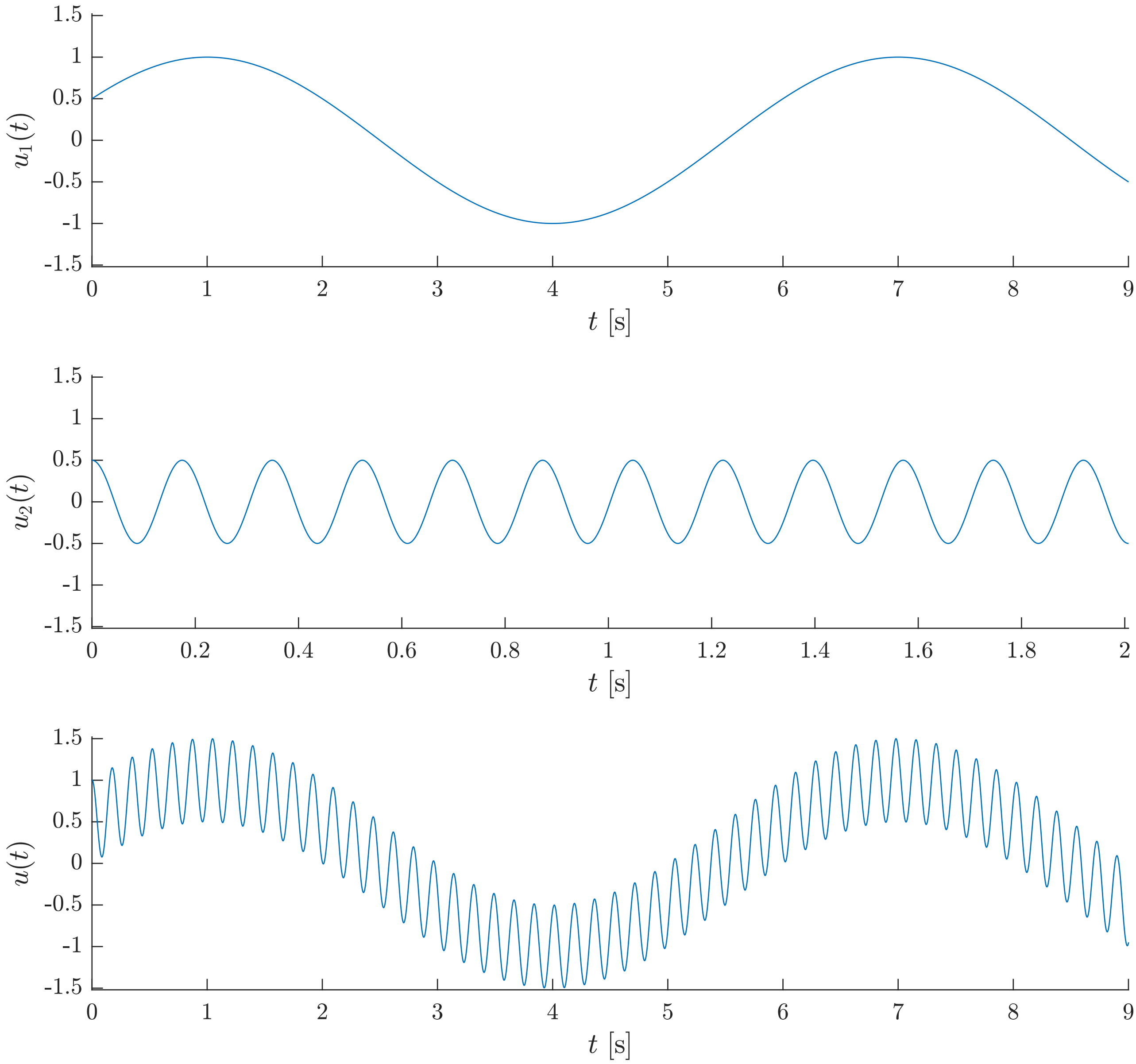


FIGURE 2 – [top] signal primaire $u_1(t)$, [centre] signal secondaire $u_2(t)$ *zoomé*, [bas] signal d'entrée total $u(t)$

On peut donc écrire l'entrée $u(t)$ à l'aide de l'expression mathématique suivante :

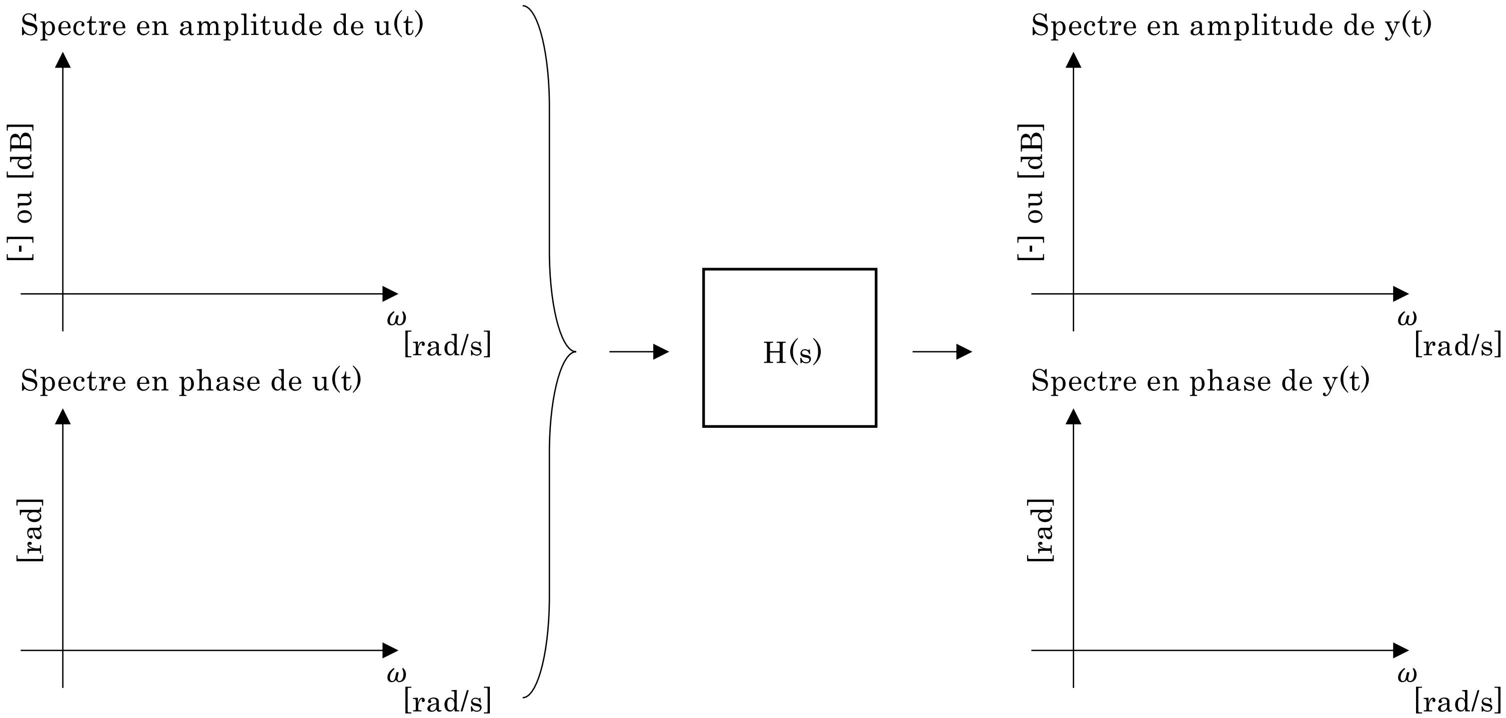
$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

On vous dit que $\omega_2 = 36$ rad/s et $\phi_2 = 0$rad.
Dessinez le spectre en amplitude et en phase du signal d'entrée.

Expliquez votre raisonnement.

(iv) Sur base de la fonction de transfert du système $H(s)$ et son diagramme de Bode, dessinez le spectre en amplitude et en phase du signal de sortie. Justifiez votre réponse.

Astuce : Vous pouvez vous aider du schéma ci-dessous pour structurer vos réponses des questions (iii) et (iv).



Question 4 La figure suivante montre les représentations d'un signal sonore dans le domaine temporel (bas) et dans le domaine fréquentiel (haut).

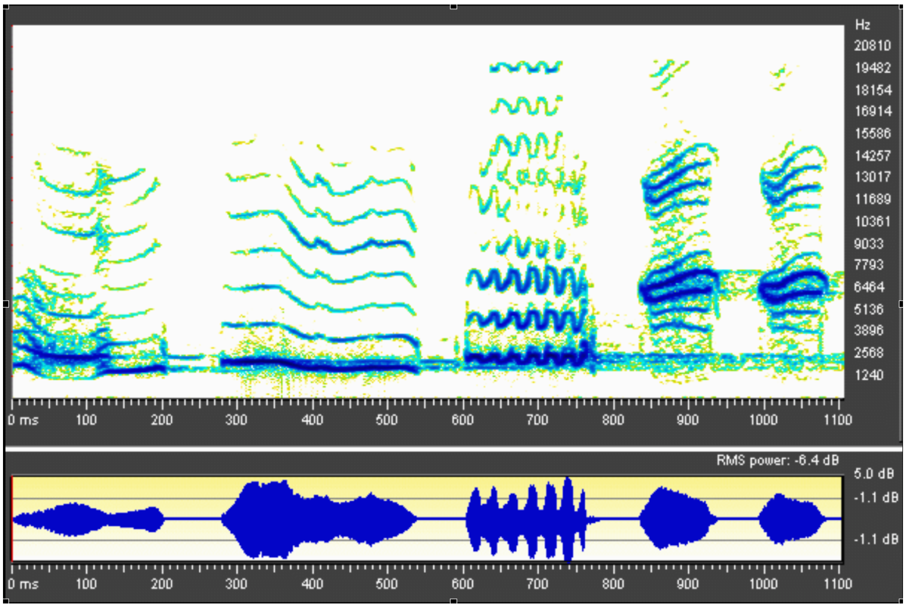


FIGURE 3 –

(i) De quel type de signal s'agit-il dans le domaine fréquentiel, et quelles informations apporte-t-il sur le signal sonore ?

(ii) Expliquez schématiquement comment le signal dans le domaine fréquentiel est obtenu à partir du signal dans le domaine temporel. Il n'est pas nécessaire d'utiliser d'équations.

(iii) Le calcul du signal dans le domaine fréquentiel fait intervenir un fenêtrage temporel. Quels sont les compromis à considérer dans le choix de la taille de la fenêtre ?