Université de Liège
Faculté des Sciences Appliquées
Techniques du Son et de l'Image

Rapport interne

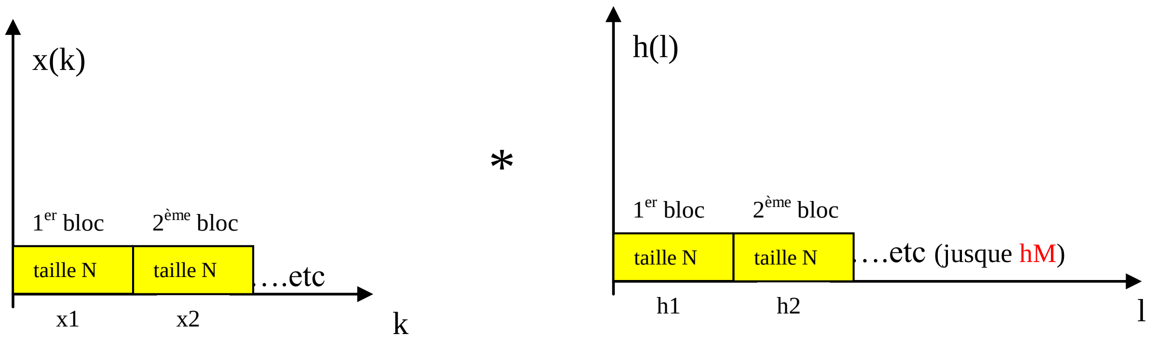
Convolution fréquentielle par bloc (longue réponse impulsionnelle)

(J.J. Embrechts, décembre 2007)

La convolution fréquentielle par blocs

1. Position du problème

Soit à convoluer un signal anéchoïque x(k), a priori de taille infinie, avec une réponse impulsionnelle h(l) définie par blocs :



$$x(k)*h(l)=\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(k)\right)*\left(\sum_{m=1}^{M} h_m(l)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M} x_i(k)*h_m(l) \qquad (1)$$

2. Où se situe le produit de convolution partiel sur l'axe des temps ?

$$(x_i*h_m)(k)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h_m(l)\,x_i(k-l) \qquad (2)$$

Or :

- $h_m(l)$ est différent de 0 si l est compris entre (m-1)N et mN-1 ;
- $x_i(k-l)$ est différent de 0 si (k-l) est compris entre (i-1)N et iN-1, ou encore :
- $x_i(k-l)$ est différent de 0 si l est compris entre k-iN+1 et k-(i-1)N.

La somme sur « l » s'étend donc de MAX((m-1)N, k-iN+1) à MIN(mN-1,k-(i-1)N).

Les cas suivants doivent être considérés :

2.1 k<(i-1)N+(m-1)N

alors,
k-iN+1<(m-1)N+1-N, donc MAX( )=(m-1)N si N>0
et
k-(i-1)N<(m-1)N<=mN-1, donc MIN( )=k-(i-1)N
et donc,
MIN<MAX, il n'y a pas de terme dans la somme (2) , et

(x_i*h_m) (k) =0

2.2 k>(i+m)N-2

alors,

k-iN+1>mN-1>=(m-1)N, donc MAX( )=k-iN+1

et

k-(i-1)N>mN+N-2>=mN-1, donc MIN( )=mN-1

et donc,

MAX>MIN, il n'y a pas de terme dans la somme (2) , et

(x_i*h_m) (k) =0

2.3 lorsque k est compris entre les deux bornes précédentes

alors,

on peut montrer qu'il existe au moins un terme dans la somme (2)

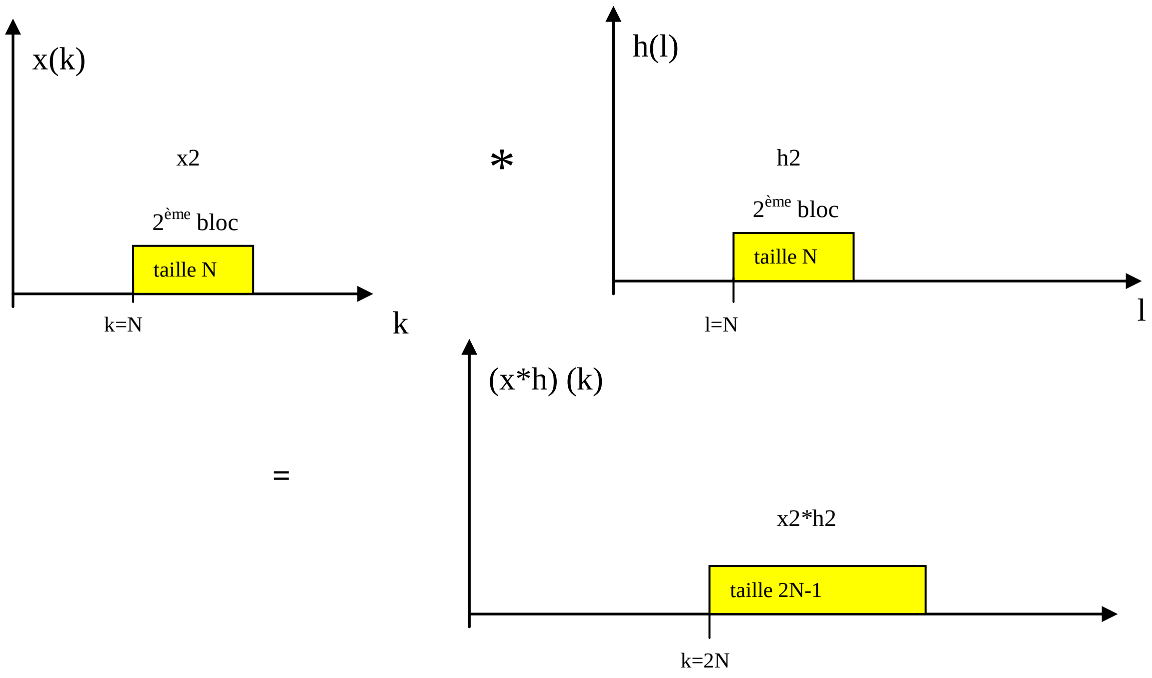
et donc, en général,

(xi*hm) (k) est différent de 0.

En conclusion, le produit de convolution partiel s'étend depuis l'instant (i+m-2)N jusqu'à (i+m)N-2, c'est-à-dire **sur un nombre de 2N-1 échantillons temporels**.

3. <u>Où se situe, par exemple, x_2*h_2 ?</u>

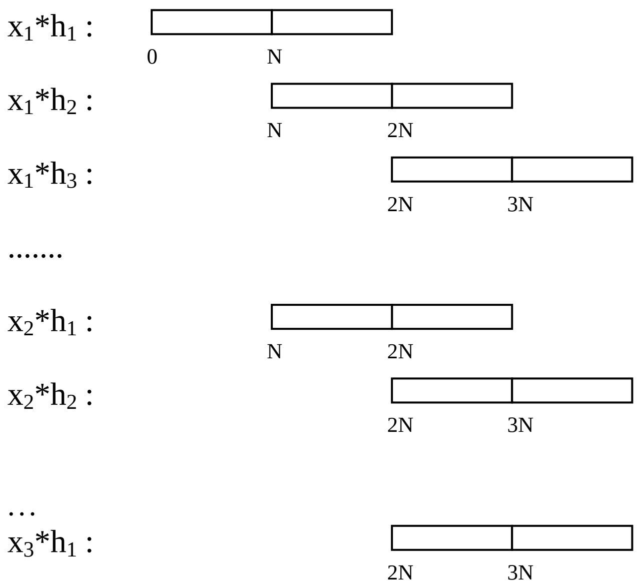
D'après ce qui précède, (x_2*h_2) (k) s'étend de k=2N jusque k=4N-2 :



Et donc, contrairement à ce que l'on pourrait croire de prime abord, (x_2*h_2) ne commence pas au début du deuxième bloc (en k=N), mais bien au début du troisième (en k=2N) !!!

4. <u>Structure temporelle et recombinaison des produits de convolution partiels : *overlap-add*.</u>

$$x*h = x_1*h_1 + x_1*h_2 + x_1*h_3 + \cdots + x_1*h_M + x_2*h_1 + x_2*h_2 + \cdots \qquad (3)$$



Aligner les blocs comme ci-dessus et sommer les blocs correspondants.

<u>Remarque</u> : le dernier échantillon des grands blocs ci-dessus (le $2N^{ème}$) est nul !

5. <u>Convolution fréquentielle par blocs</u>

Précalculs : les FFT des blocs de la réponse impulsionnelle (H_1, H_2, …), taille 2N.

Itération 1 : $x_1(k)$: lecture du premier bloc du signal x (taille N)

zéro-padding : allonger le bloc précédent à la taille 2N (avec des 0)

FFT donne $X_1(f)$: taille 2N

$X_1(f).\ H_1(f)$ | $X_1(f).\ H_2(f)$ | .... | $X_1(f).\ H_M(f)$

IFFT (taille 2N) | stockage | stockage | stockage

1^{er} bloc temporel (k=0 à N-1) → PLAY

$2^{ème}$ bloc (k=N à 2N-1) → stockage (dans xtmp)

Itération 2 : $x_2(k)$: lecture du deuxième bloc du signal x (taille N)

zéro-padding (taille 2N) et FFT $X_2(f)$: taille 2N

$X_2(f).\ H_1(f) + X_1(f).\ H_2(f)$ | $X_2(f).\ H_2(f) + X_1(f).\ H_3(f)$ | ....

IFFT (taille 2N) | stockage | stockage

1^{er} bloc temporel (k=N à 2N-1) **+ xtmp** → PLAY

$2^{ème}$ bloc (k=2N à 3N-1) → stockage (dans xtmp)

Cet algorithme permet donc de jouer le produit de la convolution avec un délai d'un seul bloc de taille N.

(si N=512, à une fréquence d'échantillonnage de 48 kHz, cela donne un délai de 10.7 msec).