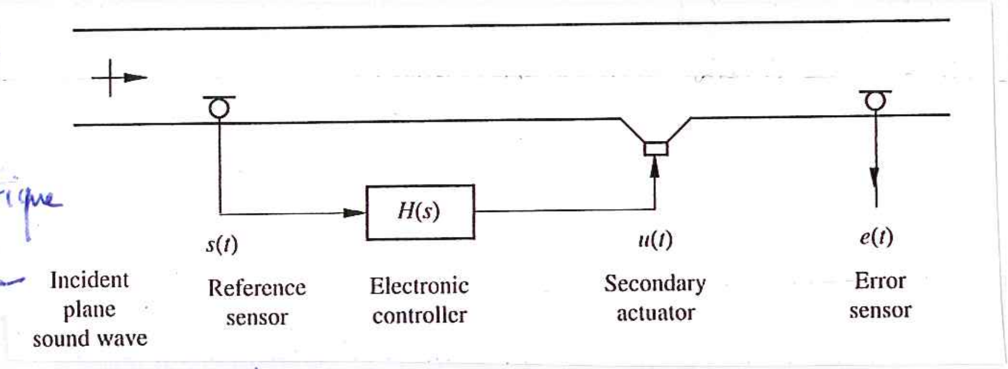
Contrôle actif du bruit dans un conduit

1. Le système physique



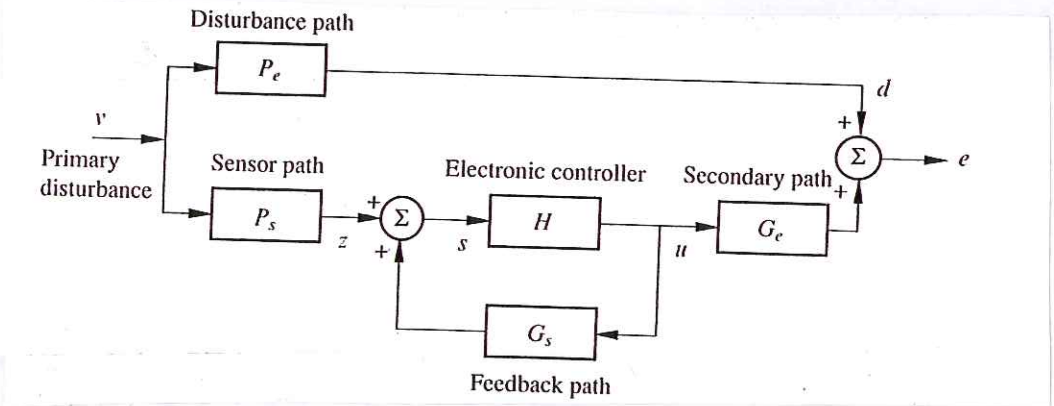
- L'onde acoustique incidente est sondée par un microphone de référence, qui génère le signal $s(t)$.

- $s(t)$ est discrétisé dans le temps, intervient en entrée du contrôleur, qui génère en sortie un signal numérique $u[n]$, converti en $u(t)$.

- $u(t)$ alimente un haut-parleur pour générer l'onde acoustique "secondaire" ou "de contre-bruit". Cette onde se propage dans le conduit <u>en amont</u> et <u>en aval</u>. Elle influence donc le microphone de référence <u>et</u> le microphone d'erreur.

- Le microphone d'erreur mesure l'onde résiduelle, somme de l'onde incidente et de l'onde de contre-bruit. Le résultat attendu est une minimisation de l'amplitude du signal d'erreur $e(t)$.

2. Le modèle du système



•) L'onde incidente est supposée ~~de~~ découler d'un signal source $v(t)$. Elle parvient au microphone d'erreur selon un chemin acoustique modélisé par la fonction de transfert P_e ("disturbance path").

"P_e" modélise la fonction de transfert acoustique, mais aussi la fonction de transfert du microphone d'erreur.

•) L'onde incidente parvient au microphone de référence via le chemin acoustique "P_s", différent de "P_e" car les deux microphones sont situés à des positions différentes dans le tube.

"P_s" peut inclure la fonction de transfert du microphone de référence.

•) le microphone ~~d'erreur~~ de référence génère $s(t)$, somme des signaux générés par l'onde incidente $z(t)$ et l'onde de contre-bruit via le chemin de feedback ("feedback path").

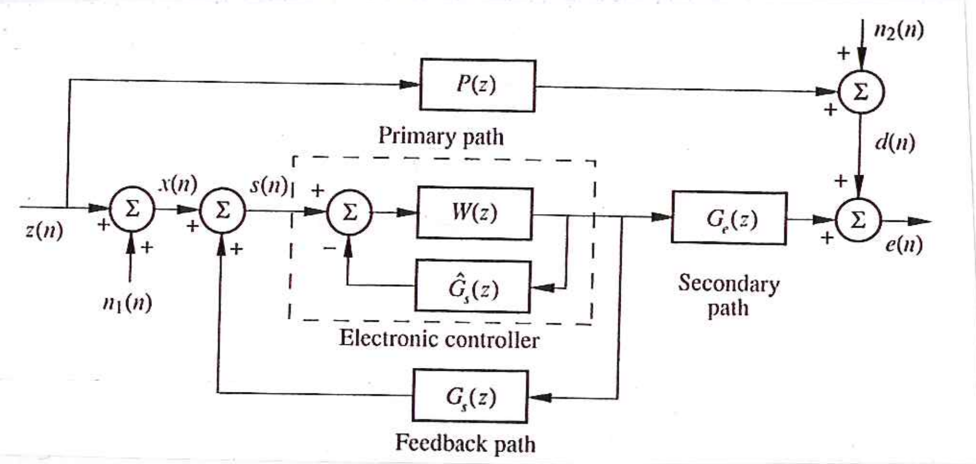
"G_s" représente le chemin acoustique depuis le haut-parleur vers (en amont) le microphone de référence. "G_s" peut inclure la fonction de transfert du micro de référence et celle du haut-parleur de contre-bruit.

•) $u(t)$ est le signal d'alimentation de ce haut-parleur

•) "G_e" est l'équivalent de "G_s" pour le chemin acoustique depuis le haut-parleur vers (en aval) le microphone d'erreur.

•) $e(t)$ est le signal généré par le microphone d'erreur.

3. Le modèle du contrôleur



La figure ci-dessus précise la fonction de transfert du contrôleur "H".

•) Celui-ci est composé d'un filtre numérique, de fonction de transfert $W(z)$ dont les coefficients seront modifiés en permanence.

↓

FILTRAGE ADAPTATIF

Il s'agit d'un filtre FIR non-récursif, dans cette application

•) Le contrôleur est également composé d'une boucle de rétroaction (feedback) dont la fonction de transfert $\hat{G}_S(z)$ imite la fonction de transfert acoustique $G_S(z)$.

$\hat{G}_S(z)$ sera également réalisée par un filtre FIR non-récursif.

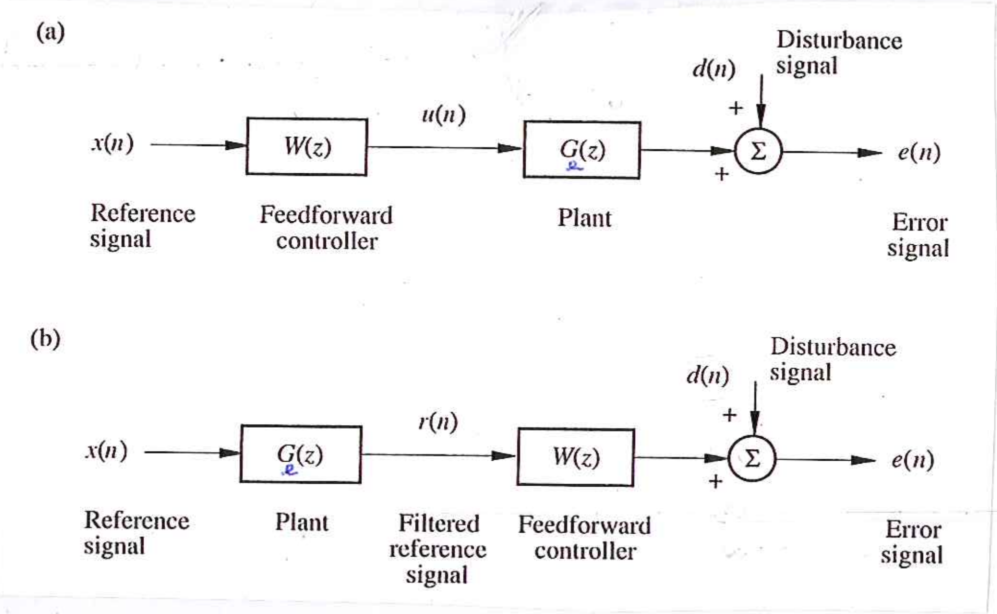
•) La figure précédente inclut également dans la modélisation du système les bruits électroniques (parasites) $n_1[n]$ et $n_2[n]$ générés par les capteurs de référence et d'erreur, respectivement.

4. Simplification du modèle et équation donnant le signal d'erreur $e[n]$

•) Si l'on accepte (hypothèse) que le feedback électronique $\hat{G}_s(z)$ compense exactement le feedback acoustique $G_s(z)$, alors le signal à l'entrée du filtre $W(z)$ est $x[n]$, appelé "signal de référence".

⚠ ne pas confondre le signal de référence $x[n]$ et le signal généré par le microphone de référence $s[n]$: voir figure précédente.

•) Si l'on accepte l'hypothèse précédente, donc, le modèle peut se mettre sous les formes suivantes (a) ou (b) : voir figure suivante.



La permutation des fonctions de transfert $W(z)$ et $G_e(z)$ est permise si les deux systèmes sont linéaires et invariants dans le temps.

$r[n]$ est le "signal de référence filtré".

•) le signal d'erreur peut s'écrire (signaux numériques) :

$$e[n] = d[n] + \underbrace{\sum_{i=0}^{M} w_i \, r[n-i]}_{\text{sortie d'un filtre FIR non-récursif}} \qquad (1)$$

→ de longueur M

→ de coefficients w_i

•) L'équation (1) peut se mettre sous la forme vectorielle suivante :

$$e[n] = d[n] + \vec{W} \cdot \vec{x}[n] \qquad (2)$$

avec $\begin{cases} \vec{W} = (w_0, w_1, \dots w_{M-1}) \\ \vec{x}[n] = (x[n], x[n-1], \dots x[n-M+1]) \end{cases}$

5. Algorithme Filtered-Reference (Filtered-x) LMS

•) Le but d'un algorithme LMS (least mean square) est de minimiser le signal d'erreur (mean-square error) au sens des moindres carrés.

· Plus précisément, minimiser :

$$J = E\left(e^2[n]\right) \qquad (3)$$

où $E(var)$ est l'espérance mathématique de la variable aléatoire "var".

Effectivement, dans notre application, le signal de référence $x[n]$, et donc $r[n]$, sont des signaux a priori aléatoires (variation "erratique" dans le temps).

- Si l'on évalue l'espérance mathématique (3) à partir d'un échantillon de N valeurs du signal d'erreur $e[i]$, alors la fonction-coût à minimiser J s'écrit :

$$J = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} e^2[i] \qquad (4)$$

- Il faut minimiser J en optimisant la valeur des coefficients du filtre $\vec{w}$. Donc trouver les coefficients optimums $\vec{w}$ qui annulent la dérivée première :

$$\frac{\partial J}{\partial w_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 2\, e[i] \frac{\partial e[i]}{\partial w_k} \qquad k=0,\dots,M-1$$

(5)

Or, par l'équation (2) :

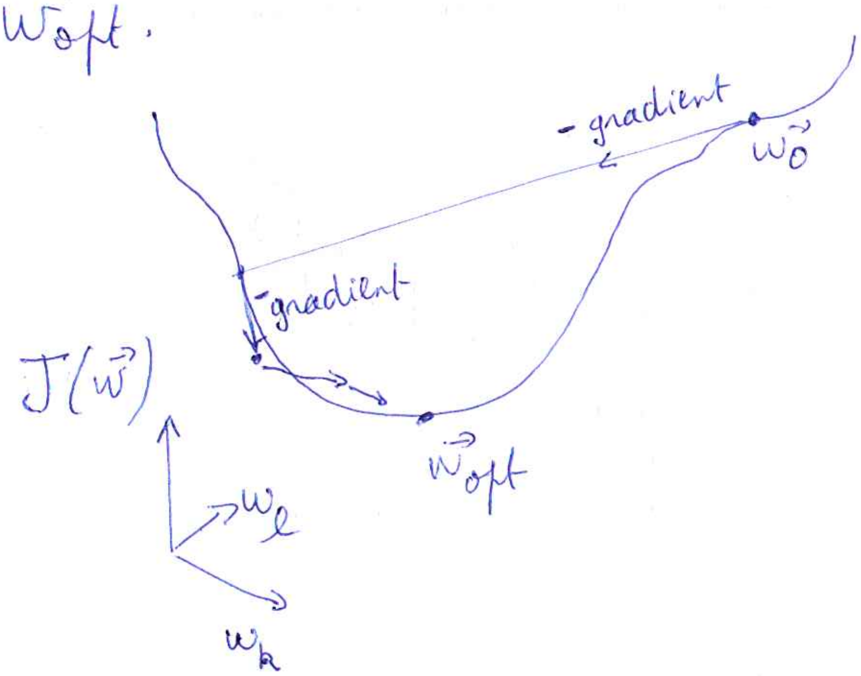
$$\frac{\partial e[i]}{\partial w_k} = x[i-k] \qquad (6)$$

et donc, d'après (5) et (6) :

$$\frac{\partial J}{\partial w_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 2\, e[i]\, x[i-k] \qquad (7)$$

$$k = 0, \dots, M-1$$

- Plutôt que chercher les valeurs de $\vec{w}$ qui annulent (7), l'algorithme du gradient (ou de la plus grande pente) consiste, à partir d'une valeur initiale $\vec{w} = \vec{w_0}$, et de manière itérative, à atteindre la valeur optimale $\vec{w} = \vec{w_{opt}}$.



La formule du gradient est la suivante :

$$\text{gradient} = \frac{\partial J}{\partial \vec{w}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{w_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{w_{M-1}} \end{bmatrix} \overset{(7)}{=} \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} e[i] \begin{bmatrix} x[i] \\ \vdots \\ x[i-M+1] \end{bmatrix} \qquad (8)$$

La forme (8) peut encore ~~se mettre~~ s'écrire :

$$\frac{\partial J}{\partial \vec{w}} = 2\, E\left(e[n]\, \vec{x}[n]\right) \qquad (9)$$

L'équation itérative de l'algorithme du gradient est donc la suivante :

$$\vec{w}_{iter} = \vec{w}_{iter-1} - \cancel{2}\,\alpha\; E\left(e[n]\, \vec{x}[n]\right) \qquad (10)$$

"α" est appelé le coefficient de convergence de l'algorithme.

•) Forme pratique de l'algorithme Filtered-x LMS

Pour éviter le calcul de l'espérance mathématique dans (10), on se propose de mettre à jour les coefficients du filtre $\vec{w}$ lors

lors de chaque période d'échantillonnage,

en transformant l'équation (11) de la manière suivante :

$$\vec{w}_{n+1} = \vec{w}_n - \alpha \, e[n] \, \vec{x}[n] \quad (11)$$

6. Implémentation pratique de l'algorithme Filtered-X LMS

6.1. Préparation / Calibration du système

•) Mesurer les réponses en fréquence $G_e(\omega)$ et $G_s(\omega)$

$G_e(\omega)$: Secondary path

$G_s(\omega)$: feedback path

•) Comment ? – injecter un signal $u[n]$ (ex : bruit blanc) dans le haut-parleur

– recueillir $s[n]$ et $e[n]$ SANS onde incidente aux deux micros

$$G_e(\omega) = \frac{E(\omega)}{U(\omega)}$$

$$G_s(\omega) = \frac{S(\omega)}{U(\omega)} \qquad (12)$$

a) Déterminer les coefficients de 2 filtres de longueur L FIR non-récursifs qui imitent $Ge(\omega)$ et $G_s(\omega)$, soient :

$$Ge(\omega) \rightarrow \hat{g}ei \quad (i = 0 \text{ à } L-1)$$
$$G_s(\omega) \rightarrow \hat{g}si \quad (i = 0 \text{ à } L-1)$$

6.2 Initialisation

→ Choisir le coefficient de convergence α

→ initialiser $\vec{W} = \vec{W_0}$

6.3 Equation du contrôleur

A chaque période d'échantillonnage :

- -) acquérir $s[n]$ et $e[n]$;
- -) calculer la sortie du filtre $\hat{G}_s(\omega)$, soit $f[n]$;
- -) $x[n] = s[n] - f[n]$
- -) $\vec{r}[n]$ = filtrage de $x[n]$ par $\hat{G}_e(\omega) = x[n] \circledast \hat{g}_e[n]$
- -) $u[n] = x[n] \circledast w_n[n]$
- -) $\vec{w}_{n+1} = \vec{w}_n - \alpha\, e[n]\, \vec{r}[n]$

6.4 Variante ??

Remplacer $\hat{G}_e(\omega)$ et $\hat{G}_s(\omega)$ par de simples délais