Eléments du calcul des probabilités

Répétition 3

14 mars 2018

Exercices sur les variables aléatoires continues à valeurs réelles

3.1. Soit la fonction $f_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} kx & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

a) Déterminer k pour que $f_{\mathcal{X}}(x)$ soit la d.d.p. d'une variable aléatoire $\mathcal{X}$.

b) Déterminer la fonction de répartition $F_{\mathcal{X}}(x)$.

c) Effectuer les graphiques de $f_{\mathcal{X}}(x)$ et $F_{\mathcal{X}}(x)$.

d) Calculer $E\{\mathcal{X}\}$ et $V\{\mathcal{X}\}$.

e) Déterminer $P(\mathcal{X} > \frac{3}{4} | \mathcal{X} > \frac{1}{2})$.

3.2. Des bus passent toutes les 15 minutes à un arrêt donné, le premier y passant à 7 heures du matin. On suppose que les bus ne font pas grève ce jour là ! Un étudiant se présente à l'arrêt entre 7h et 7h30 du matin, l'heure exacte étant une variable aléatoire uniforme sur cette période. Trouvez la probabilité qu'il doive attendre moins de 5 minutes.

3.3. On fixe deux points A et B au hasard sur un cercle. On demande la loi de distribution de la longueur de la corde AB et son espérance mathématique.
Suggestion : Utiliser comme variable aléatoire uniforme, l'angle au centre α qui intercepte l'arc AB.

3.4. Quelle est la probabilité que la durée de fonctionnement d'un ordinateur avant sa première panne soit comprise entre 50 et 150 heures, en sachant que cette durée est une variable aléatoire exponentielle de moyenne 100.

3.5. Soit $\mathcal{Z}$ une variable aléatoire suivant la loi de Gauss. Déterminez :

a) $P(\mathcal{Z} \leq 1,33)$

b) $P(0 \leq \mathcal{Z} \leq 1,33)$

c) $P(-1,17 \leq \mathcal{Z} \leq 0)$

d) $P(1,2 \leq \mathcal{Z} \leq 1,75)$

e) $P(-0,83 \leq \mathcal{Z} \leq 0,75)$

f) z tel que $P(\mathcal{Z} \leq z) = 0,4765$

g) z tel que $P(-1,22 \leq \mathcal{Z} \leq z) = 0,397$

3.6. La taille $\mathcal{X}$ des sapins d'un producteur suit une loi normale de moyenne $\mu = 120cm$ et d'écart-type $\sigma = 15cm$. Les sapins de taille inférieure à 1 mètre sont vendus à 40 €, ceux de taille supérieure à 130 cm sont vendus à 60 € et les autres sont vendus à 50 €. Sachant que le coût de production d'un sapin est de 32 €, quelque soit sa taille, déterminez :

a) l'espérance de gain par sapin

b) l'espérance de gain pour 1000 sapins

3.7. On considère une série de 400 épreuves identiques d'un tirage dichotomique avec remise pour lequel on a P(succès) $= \frac{1}{10}$. On demande de calculer la probabilité que le nombre de succès soit dans [31, 49].

Exercices suggérés

3.8. Le nombre d'inscriptions à un cours de psychologie est une variable aléatoire de Poisson d'espérance $\lambda = 100$. Le professeur donnant ce cours a décidé que si le nombre des inscriptions est au-delà de 120, il créera deux sections et donnera donc deux cours, tandis que sinon, une seule classe sera formée. Quelle est la probabilité que le professeur ait à donner deux fois le cours ?

3.9. Deux points A et B sont pris au hasard sur un cercle de rayon R. M étant le milieu de la corde $[AB]$ et O le centre du cercle, on demande

a) la fonction de répartition de la longeur du segment $[OM]$

b) la densité de probabilité de cette longueur

c) l'espérance mathématique de cette longueur

Suggestion : Utiliser comme variable aléatoire uniforme, l'angle AOB.

3.10. On choisit un point P au hasard sur un segment $[AB]$ de longueur L et on définit une variable aléatoire $\mathcal{Z} = |AP|^2 + |PB|^2$. On demande

a) la fonction de répartition de $\mathcal{Z}$.

b) la densité de probabilité de $\mathcal{Z}$.

c) l'espérance mathématique de $\mathcal{Z}$.

3.11. Dans une petite salle de concert, le nombre de spectateurs suit une loi normale de moyenne 586 et d'écart-type 97. Quel est le pourcentage de représentations auxquelles assistent :

a) entre 500 et 700 spectateurs

b) au moins 400 spectateurs

3.12. Soit la fonction $f_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} kx(1-x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

a) Déterminer k pour que $f_{\mathcal{X}}(x)$ soit la d.d.p. d'une variable aléatoire continue $\mathcal{X}$.

b) Déterminer la fonction de répartition de $\mathcal{X}$.

c) Calculer $E\{\mathcal{X}\}$ et $V\{\mathcal{X}\}$.

d) On considère la fonction $g(t) = P(\mathcal{X} \leq sin(t) | \mathcal{X} \leq t), t \in [0, 1]$
Calculer $\lim_{t \to 0} g(t)$. Interpréter le résultat obtenu.
(N.B. : On a $sin(t) \leq t, \forall t \in [0, 1]$)

3.13. Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire $\mathcal{N}(\mu = 100, \sigma^2 = 400)$. Déterminez

a) $P(90 \leq \mathcal{X} \leq 125)$

b) $P(\mathcal{X} \geq 125)$

c) x tel que $P(x \leq \mathcal{X} \leq 120) = 0,3711$

3.14. On suppose que la durée d'une conversation téléphonique mesurée en minutes est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = 0.1$. Vous arrivez à une cabine téléphonique et quelqu'un passe juste avant vous. Avec quelle probabilité devrez-vous attendre

a) plus de 10 minutes

b) entre 10 et 20 minutes

3.15. Le temps nécessaire pour servir des clients à un guichet est distribué selon une loi exponentielle avec une durée moyenne de service de 5 minutes par client.

a) Quelle est la probabilité que la durée de service soit inférieure à 2 minutes ?

b) Est-ce exact de dire qu'il y a 50% de chances pour que la durée de service d'un client soit inférieure à la durée moyenne du service ?

3.16. EXAMEN SEPTEMBRE 2012
Soit la fonction

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad |x| \leq k, k > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer k pour que $f_{\mathcal{X}}(x)$ soit la d.d.p. d'une variable aléatoire continue $\mathcal{X}$.

b) Utilisez le graphique de $f_{\mathcal{X}}(x)$ pour estimer $P(-\frac{1}{4} \leq \mathcal{X} \leq \frac{1}{4})$

c) Déterminer la fonction de répartition de $\mathcal{X}$ et en déduire $P(0 \leq \mathcal{X} \leq a), 0 \leq a \leq \frac{1}{2}$

d) Déterminer l'espérance mathématique de $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^2$.

3.17. EXAMEN JUIN 2012
On considère que le nombre de kilomètres parcourus avant le premier accident par un conducteur masculin suit une loi normale de moyenne 35000 km avec un écart-type de 5000 km. Par ailleurs, il s'avère que pour une conductrice, le nombre de kilomètres parcourus avant le premier accident suit une loi normale de moyenne 38000 km avec un écart-type de 6000 km.

a) En supposant que la proportion de conducteurs masculins est de 55%, déterminez le pourcentage de conducteurs ayant eu leur premier accident
— avant 25000 km
— entre 25000 km et 40000 km
— après 40000 km

b) Au bout de combien de kilomètres peut-on dire que 75% des conducteurs <u>masculins</u> ont eu leur premier accident ?

c) Un individu a eu son premier accident avant d'avoir atteint 25000 km de conduite, la probabilité que cet individu soit une femme est de 38%. Sur base de ces informations, estimer la proportion de conducteurs masculins.

3.18. EXAMEN JUIN 2013

Soit la fonction définie, pour $a \geq 0$, par $f_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b}e^{-\frac{x-a}{b}} & \text{si} \quad x \geq a \\ 0 & \text{si} \quad x < a \end{cases}$

a) Déterminer la condition à imposer sur b pour que $f_{\mathcal{X}}(x)$ soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire $\mathcal{X}$.

b) Déterminer la fonction de répartition $F_{\mathcal{X}}(x)$.

c) Calculer $E\{\mathcal{X}\}$ et $V\{\mathcal{X}\}$.

d) Un train A doit arriver à Liège Guillemins à 10h00. Un autre train B doit quitter Liège Guillemins à 10h02. Le retard d'arrivée de A et le retard de départ de B sont indépendants et suivent tous les deux une loi dont la densité de probabilité est définie par la fonction $f_{\mathcal{X}}(x)$ avec $a = 0$ et $b = 1$, où x est exprimé en minutes. Il faut 1 minute à un passager du train A pour se rendre au départ du train B. Quelle est la probabilité pour qu'un passager de A puisse prendre le train B ?

Solutions des exercices suggérés

3.8. $\approx 2\%$

3.9. a)

$$F_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - \frac{2arccos(\frac{x}{R})}{\pi} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq R \\ 1 & \text{si} \quad x > R \end{cases}$$

b)

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{R^2-x^2}} & \text{si} \quad x \in [0, R[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) $\frac{2R}{\pi}$

3.10. a)

$$F_{\mathcal{Z}}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z < \frac{L^2}{2} \\ \frac{\sqrt{2z-L^2}}{L} & \text{si} \quad \frac{L^2}{2} \leq z \leq L^2 \\ 1 & \text{si} \quad z > L^2 \end{cases}$$

b)

$$f_{\mathcal{Z}}(z) = \begin{cases} \frac{1}{L\sqrt{2z-L^2}} & \text{si} \quad z \in]\frac{L^2}{2}, L^2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) $\frac{2}{3}L^2$

3.11. a) 69,24% b) 97,24%

3.12. a) 6 b)

$$F_{\mathcal{X}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 3t^2 - 2t^3 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$

c) $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{20}$ d) 1, car plus t est proche de 0, plus $sint$ est proche de t

3.13. a) 0,589 b) 0,105 c) 97,6 3.14. a) 0,368 b) 0,23

3.14. a) e^{-1} b) $e^{-1} - e^{-2}$

3.15. a) 0,33 b) 0,632 $\Rightarrow$ non

3.16. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$

c)

$$F_{\mathcal{X}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -\frac{1}{2} \\ \frac{t^2}{2} + t + \frac{3}{8} & \text{si} \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

d) $\frac{1}{12}$

3.17. a) 1,9% 72,7% 25,4% b) 38350 c) 51,8%

3.18. a) $b > 0$ b) si $t \leq a$: $F(t) = 0$, si $t > a$: $F(t) = 1 - e^{-\frac{t-a}{b}}$

c) $E\{\mathcal{X}\} = a + b$ $V\{\mathcal{X}\} = b^2$ d) 81,6%