Eléments de statistique

Formulaire d'examen

Statistiques descriptives

Table 1 – Statistiques univariées

Statistique	Notation	Définition
Moyenne	m_x	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Ecart-type	s_x	$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2}$
Fréquence absolue	$n_x(y)$	nombre de y observés dans la colonne x
Fréquence relative	$\hat{f}_x(y)$	$\frac{n_x(y)}{n}$
Mode	mode_x	$\arg\max_y \hat{f}_x(y)$
Fréqu. rel. cumulées	$\hat{F}_x(y)$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1(x_i < y)$
Premier quartile	Q_x^1	$\hat{F}_x^{-1}(0.25)$
Médiane	Médiane_x	$\hat{F}_x^{-1}(0.5)$
Troisième quartile	Q_x^3	$\hat{F}_x^{-1}(0.75)$

Table 2 – Statistiques bivariées

Statistique	Notation	Définition
Coéfficient de corrélation linéaire	$r_{x,y}$	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)(y_i-m_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i-m_y)^2}}$
Covariance empirique	$\hat{cov}(x,y)$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)(y_i - m_y)$

Echantillons i.i.d.

Moyenne d'échantillon $\boxed{m_x(D_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$

$E\{m_x\} = \mu_{\mathcal{X}}$ $\quad V\{m_x\} = \frac{\sigma_{\mathcal{X}}^2}{n}$ $\quad m_x(D_n) \xrightarrow{p.s.} \mu_{\mathcal{X}}$ $\quad \frac{m_x(D_n)-\mu_{\mathcal{X}}}{\sigma_{\mathcal{X}}/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1)$

Si $\mathcal{X}$ est une variable de Bernoulli
$E\{f_1\} = p_1$ $\quad V\{f_1\} = \frac{p_1(1-p_1)}{n}$ $\quad f_x(D_n) \xrightarrow{p.s.} p_1$ $\quad f_1 \sim \mathcal{N}(p_1; \frac{p_1(1-p_1)}{n})$

Variance d'échantillon $\boxed{s_x^2(D_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2}$

$E\{s_x^2\} = \frac{n-1}{n}\sigma_{\mathcal{X}}^2$ $\quad V\{s_x^2\} = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma_{\mathcal{X}}^4$

Variance corrigée $\boxed{s_{n-1}^2(D_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2}$

$E\{s_{n-1}^2\} = \sigma_{\mathcal{X}}^2$ $\quad V\{s_{n-1}^2\} = \frac{2}{n-1}\sigma_{\mathcal{X}}^4$

Inégalité de Bienaymé-Tchebyshev $\boxed{P(|m_x - E\{m_x\}| \geq c\sqrt{V\{m_x\}}) \leq \frac{1}{c^2}}$

Estimation

Erreur quadratique $= E\{(\mathcal{T}_n - \theta^*)^2\} =$ Variance + Biais$^2 = V\{\mathcal{T}_n\} + (E\{\mathcal{T}_n - \theta^*\})^2$

Intervalle de confiance du paramètre μ d'une loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

σ connu : $\boxed{m_X - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq m_X + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ [1]

σ inconnu, $n > 30$: $\boxed{m_X - u_{1-\alpha/2}\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq m_X + u_{1-\alpha/2}\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}}$

σ inconnu, $n \leq 30$: $\boxed{m_X - t_{1-\alpha/2}\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq m_X + t_{1-\alpha/2}\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}}$

Intervalle de confiance d'une proportion

$$\boxed{f - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \leq p \leq f + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}}$$

Méthode du maximum de vraissemblance

Estimer le paramètre θ par la valeur qui maximise la probabilité des observations.

Démarche bayesienne

1. postuler la loi a priori $f_\theta(\theta)$
2. utiliser la formule de Bayes $f_{\theta|D_n}(\theta) = \frac{f_\theta(\theta)P_{D_n|\theta}}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(\theta)P_{D_n|\theta}d\theta}$
3. déterminer une valeur du paramètre θ à l'aide d'une des formules suivantes :

$$\hat{\theta}_{MAP} = \arg\max_{\theta' \in \Theta} f_{\theta|D_n}(\theta')$$

$$\hat{\theta}_{EXP} = \arg\min_{\theta' \in \Theta} E\{(\theta' - \theta)^2 | D_n\} = \int_{\theta' \in \Theta} \theta' f_{\theta|D_n}(\theta')d\theta'$$

Fonction Γ et Loi β

$\boxed{\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}dx}$ défini pour $t > 0$

Propriétés : $\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1)$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ si n $\in N_0$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$\mathcal{X}$ suit une loi $\beta(a,b)$, avec $a, b > 0$, si sa densité s'écrit :

$$\boxed{f_\mathcal{X}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}}$$

Propriétés : si $a, b > 1$ alors $f_\mathcal{X}(x)$ atteint son maximum en $\frac{a-1}{a+b-2}$

$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

1. Dans toutes les formules et tables de ce formulaire, nous utiliserons la notation $1 - \alpha/2$ qui a été utilisée en répétition plutôt que la notation $\alpha/2$ qui a été utilisée au cours théorique.

Tests d'hypothèses

- Test unilatéral à droite : $H_0 : \mu_{\mathcal{X}} = \mu_0 \quad H_1 : \mu_{\mathcal{X}} > \mu_0$
- Test unilatéral à gauche : $H_0 : \mu_{\mathcal{X}} = \mu_0 \quad H_1 : \mu_{\mathcal{X}} < \mu_0$
- Test bilatéral : $H_0 : \mu_{\mathcal{X}} = \mu_0 \quad H_1 : \mu_{\mathcal{X}} \neq \mu_0$

Dans le cas d'un test unilatéral à droite/gauche, sous H_0, on calcule la valeur critique μ_c telle que la probabilité d'observer une valeur plus grande/petite que μ_c soit égale au seuil α fixé a priori. On rejettra H_0 si et seulement si m_x est plus grand/petit que μ_c. Dans le cas d'un test bilatéral, sous H_0, on construit un intervalle symétrique autour de μ_0 de manière à ce que la probabilité d'être en dehors de l'intervalle soit égale au seuil α. On rejettra H_0 si et seulement si m_x est en dehors de l'intervalle.

Les tests sur une proportion se déroulent de manière similaire, en remplaçant $\mu_{\mathcal{X}}$, μ_0 et m_x respectivement par p_1, $p_{1,0}$ et f_1.

Tests d'ajustement

Un test d'ajustement a pour objectif de déterminer si une distribution théorique peut correspondre à une distribution de fréquences observées.

H_0 : la loi proposée convient. H_1 : la loi proposée ne convient pas.

Sous H_0, on construit une table donnant pour chaque valeur/intervalle de la variable étudiée l'espérance de l'effectif théoriquement attendu t_i, obtenu en multipliant la probabilité théorique (calculée à l'aide de la loi proposée) de cette valeur/intervalle par le nombre total n d'observations. On effectue des regroupements de lignes du tableau de manière à ce qu'aucune ligne ne comporte d'effectif théorique de taille inférieure à 5. Soit k le nombre final de lignes dans la table. On calcule ensuite la "distance" entre les effectifs observés o_i et les effectifs attendus t_i :

$$\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - t_i)^2}{t_i}$$

Cet estimateur suit une loi χ^2 avec un nombre de degrés de libertés $\nu = k-1-a$, où a est le nombre de paramètres qu'il a fallu estimer pour calculer les probabilités (0 pour une uniforme, 1 pour une loi de Poisson, 2 pour une loi normale, ...). On rejetera H_0 si la valeur de χ^2_{obs} est plus grande que la valeur critique χ^2_{crit} définie par $P(\chi^2 > \chi^2_{crit}) = \alpha$. Voir table 4 pour les valeurs les plus courantes.

Tests d'indépendance

Un test d'indépendance a pour objectif de déterminer si deux variables qualitatives A et B, de modalités p et q respectivement, sont indépendantes.

H_0 : A et B sont indépendantes. H_1 : A et B ne sont pas indépendantes.

Sous H_0, on construit une table donnant pour chaque valeur possible de A et B, l'effectif théoriquement attendu t_{ij}, obtenu en multipliant le nombre total n d'observations par les probabilité théorique de A_i et B_j. On effectue des regroupements de classes de manière à ce qu'aucune ligne ou colonne ne comporte d'effectif théorique de taille inférieure à 5. On calcule ensuite la distance entre les effectifs observés o_{ij} et les effectifs attendus t_{ij} :

$$\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \frac{(o_{ij} - t_{ij})^2}{t_{ij}}$$

Cet estimateur suit une loi χ^2 avec un nombre de ddl $\nu = (p-1)(q-1)$. On rejetera finalement H_0 si la valeur de χ^2_{obs} est plus grande que la valeur critique χ^2_{crit}.

Table 3 – Table de Gauss (exemple de lecture : $P(\mathcal{Z} \leq 1,46) = 0,92785$)

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999
3,8	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999
3,9	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Valeurs de $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pour les α les plus utilisés

α	0,01	0,05	0,1
$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$	2,575	1,96	1,645

TABLE 4 – Valeurs critiques de χ^2 pour différentes valeurs de α et de ddl

ddl	α=0,995	α=0,99	α=0,975	α=0,95	α=0,9	α=0,75	α=0,5	α=0,25	α=0,1	α=0,05	α=0,025	α=0,01	α=0,005
1	0.00004	0.00016	0.00098	0.00393	0.01579	0.10153	0.45494	1.32330	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	0.01003	0.02010	0.05064	0.10259	0.21072	0.57536	1.38629	2.77259	4.60517	5.99146	7.37776	9.21034	10.59663
3	0.07172	0.11483	0.21580	0.35185	0.58437	1.21253	2.36597	4.10834	6.25139	7.81473	9.34840	11.34487	12.83816
4	0.20699	0.29711	0.48442	0.71072	1.06362	1.92256	3.35669	5.38527	7.77944	9.48773	11.14329	13.27670	14.86026
5	0.41174	0.55430	0.83121	1.14548	1.61031	2.67460	4.35146	6.62568	9.23636	11.07050	12.83250	15.08627	16.74960
6	0.67573	0.87209	1.23734	1.63538	2.20413	3.45460	5.34812	7.84080	10.64464	12.59159	14.44938	16.81189	18.54758
7	0.98926	1.23904	1.68987	2.16735	2.83311	4.25485	6.34581	9.03715	12.01704	14.06714	16.01276	18.47531	20.27774
8	1.34441	1.64650	2.17973	2.73264	3.48954	5.07064	7.34412	10.21885	13.36157	15.50731	17.53455	20.09024	21.95495
9	1.73493	2.08790	2.70039	3.32511	4.16816	5.89883	8.34283	11.38875	14.68366	16.91898	19.02277	21.66599	23.58935
10	2.15586	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518	6.73720	9.34182	12.54886	15.98718	18.30704	20.48318	23.20925	25.18818
11	2.60322	3.05348	3.81575	4.57481	5.57778	7.58414	10.34100	13.70069	17.27501	19.67514	21.92005	24.72497	26.75685
12	3.07382	3.57057	4.40379	5.22603	6.30380	8.43842	11.34032	14.84540	18.54935	21.02607	23.33666	26.21697	28.29952
13	3.56503	4.10692	5.00875	5.89186	7.04150	9.29907	12.33976	15.98391	19.81193	22.36203	24.73560	27.68825	29.81947
14	4.07467	4.66043	5.62873	6.57063	7.78953	10.16531	13.33927	17.11693	21.06414	23.68479	26.11895	29.14124	31.31935
15	4.60092	5.22935	6.26214	7.26094	8.54676	11.03654	14.33886	18.24509	22.30713	24.99579	27.48839	30.57791	32.80132
16	5.14221	5.81221	6.90766	7.96165	9.31224	11.91222	15.33850	19.36886	23.54183	26.29623	28.84535	31.99993	34.26719
17	5.69722	6.40776	7.56419	8.67176	10.08519	12.79193	16.33818	20.48868	24.76904	27.58711	30.19101	33.40866	35.71847
18	6.26480	7.01491	8.23075	9.39046	10.86494	13.67529	17.33790	21.60489	25.98942	28.86930	31.52638	34.80531	37.15645
19	6.84397	7.63273	8.90652	10.11701	11.65091	14.56200	18.33765	22.71781	27.20357	30.14353	32.85233	36.19087	38.58226
20	7.43384	8.26040	9.59078	10.85081	12.44261	15.45177	19.33743	23.82769	28.41198	31.41043	34.16961	37.56623	39.99685
21	8.03365	8.89720	10.28290	11.59131	13.23960	16.34438	20.33723	24.93478	29.61509	32.67057	35.47888	38.93217	41.40106
22	8.64272	9.54249	10.98232	12.33801	14.04149	17.23962	21.33704	26.03927	30.81328	33.92444	36.78071	40.28936	42.79565
23	9.26042	10.19572	11.68855	13.09051	14.84796	18.13730	22.33688	27.14134	32.00690	35.17246	38.07563	41.63840	44.18128
24	9.88623	10.85636	12.40115	13.84843	15.65868	19.03725	23.33673	28.24115	33.19624	36.41503	39.36408	42.97982	45.55851
25	10.51965	11.52398	13.11972	14.61141	16.47341	19.93934	24.33659	29.33885	34.38159	37.65248	40.64647	44.31410	46.92789
26	11.16024	12.19815	13.84390	15.37916	17.29188	20.84343	25.33646	30.43457	35.56317	38.88514	41.92317	45.64168	48.28988
27	11.80759	12.87850	14.57338	16.15140	18.11390	21.74940	26.33634	31.52841	36.74122	40.11327	43.19451	46.96294	49.64492
28	12.46134	13.56471	15.30786	16.92788	18.93924	22.65716	27.33623	32.62049	37.91592	41.33714	44.46079	48.27824	50.99338
29	13.12115	14.25645	16.04707	17.70837	19.76774	23.56659	28.33613	33.71091	39.08747	42.55697	45.72229	49.58788	52.33562
30	13.78672	14.95346	16.79077	18.49266	20.59923	24.47761	29.33603	34.79974	40.25602	43.77297	46.97924	50.89218	53.67196

TABLE 5 – Valeurs de t de student pour différentes valeurs du nombre de ddl

ddl	$t_{0,75}$	$t_{0,80}$	$t_{0,85}$	$t_{0,90}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$	$t_{0,995}$	$t_{0,9975}$	$t_{0,999}$	$t_{0,9995}$
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,3	318,3	636,6
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09	22,33	31,60
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,21	12,92
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,767
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,690
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,659
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646