Eléments du calcul des probabilités

Solution de l'exercice suggéré 1.17.

Soit D_i l'évènement *le ième DVD est dans le ième coffret.*
On cherche à calculer la probabilité de l'événement $E = \cup_{i=1}^{n} D_i$.

Les D_i ne sont pas mutuellement exclusifs. Il faut donc utiliser la formule de Poincaré.

$$\begin{aligned} P(E) = & \textstyle\sum_{\{i_1:1\leq i_1\leq n\}} P(D_{i_1}) \\ & - \textstyle\sum_{\{(i_1,i_2):1\leq i_1<i_2\leq n\}} P(D_{i_1}\cap D_{i_2}) \\ & + \textstyle\sum_{\{(i_1,i_2,i_3):1\leq i_1<i_2<i_3\leq n\}} P(D_{i_1}\cap D_{i_2}\cap D_{i_3}) \\ & -... \\ & +(-1)^{n-2}\textstyle\sum_{\{(i_1,...,i_{n-1}):1\leq i_1<...<i_{n-1}\leq n\}} P(D_{i_1}\cap ... \cap D_{i_{n-1}}) \\ & +(-1)^{n-1}P(\cap_{i=1}^{n} D_i) \end{aligned}$$

Calculons successivement chacun des termes :

$$\begin{aligned} & P(D_i) = \tfrac{(n-1)!}{n!} = \tfrac{1}{n} \Rightarrow \quad \textstyle\sum_{\{i_1:1\leq i_1\leq n\}} P(D_{i_1}) = 1 \\ & P(D_{i_1}\cap D_{i_2}) = \tfrac{(n-2)!}{n!} \Rightarrow \textstyle\sum_{\{(i_1,i_2):1\leq i_1<i_2\leq n\}} P(D_{i_1}\cap D_{i_2}) = C_n^2\tfrac{(n-2)!}{n!} = \tfrac{1}{2!} \\ & ... \qquad \Rightarrow \textstyle\sum_{\{(i_1,...,i_r):1\leq i_1<...<i_r\leq n\}} P(D_{i_1}\cap ... \cap D_{i_r}) = C_n^r\tfrac{(n-r)!}{n!} = \tfrac{1}{r!} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$P(E) = 1 - \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} - ... + (-1)^{n-1}\tfrac{1}{n!} = \textstyle\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\tfrac{1}{r!}$$

Pour $n = 20$ on a $P(E) \approx 63,2\%$

A l'infini,

$lim_{n\to\infty}P(E) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{1}{r!}$ pourvu que cette série converge

Or $e^x = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r} \quad \Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{1}{r!} = 1 - \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!} = 1 - e^{-1}$