

# Eléments de statistique

## Répétition 3

5 novembre 2019

### Estimation

Le but de l'estimation est d'évaluer un ou plusieurs paramètre(s) de population à partir d'un ou plusieurs échantillon(s).

### Exercices

- 3.1. Le record du monde de marathon est détenu par le Kenyan Dennis Kimetto en 2 h 02 minutes 57 secondes. On tire un échantillon i.i.d. de 9 résultats de ce marathonien et le temps moyen réalisé est d'exactement 125 minutes. Donner l'intervalle de confiance à 95% du temps de course moyen de Dennis Kimetto, sachant que les résultats sur marathon de cet athlète suivent une loi normale dont l'écart-type est de 1 minute.
- 3.2. On s'intéresse à la durée de vie moyenne des piles de 1,5 volts.
  - a) On observe 100 piles et on constate que la durée moyenne de vie est de 57,4 heures avec un écart-type de 11,04 heures. Donner l'intervalle de confiance à 99% de la durée de vie moyenne d'une pile de la population.
  - b) Quelle est la taille d'un échantillon pour avoir un intervalle de confiance à 99% dont la largeur est de 4 heures au plus, si on pense que l'écart-type de la population est égal à 10 heures ?
- 3.3. Les temps de séchage (en heures) suivants ont été enregistrés lors de différents essais d'une nouvelle peinture au latex : 3.4, 2.5, 4.8, 2.9, 3.6, 2.8, 3.3, 5.6, 3.7, 2.8, 4.4, 4.0, 5.2, 3.0 et 4.8. On suppose que les mesures effectuées représentent un échantillon d'une population normale.
  - a) Trouvez un intervalle de confiance à 95% du temps de séchage moyen de la peinture.
  - b) Même question en sachant que l'écart-type de la population est égal à 0,97.
  - c) Comparez les intervalles de confiance obtenus aux points a) et b). Que peut-on en conclure ?
  - d) Supposons qu'on fasse une nouvelle mesure s'élevant à 6,9 heures. Cette mesure est-elle surprenante ?
- 3.4. Supposons qu'on étudie une variable quantitative suivant une loi  $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$  en partant d'un échantillon i.i.d.. Comparez les estimateurs  $s_n^2$  et  $s_{n-1}^2$  du paramètre  $\sigma^2$  en terme de variance, biais et erreur quadratique moyenne.

## Exercices suggérés

- 3.5. Une élection entre un candidat A et un candidat B va avoir lieu dans un pays dont le corps électoral est constitué de 35 millions de personnes. Un sondage a été réalisé auprès de 1400 électeurs pris au hasard. L'échantillon a donné 680 personnes prêtes à voter pour A. Déterminer l'intervalle de confiance au seuil de 95% de la proportion de personnes favorables au candidat A.
- 3.6. Comparez l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur  $s_{n+1}^2$  à celle des autres estimateurs de l'exercice 3.5.
- 3.7. Une entreprise du secteur métallique effectue un test d'une nouvelle méthode pour lutter contre la corrosion. Un échantillon aléatoire de 100 pièces métalliques n'ayant subi aucun traitement a été immergé dans un bain pendant 24 heures. Les pièces de métal on en moyenne perdu 12,2 millimètre d'épaisseur, avec un écart-type de 1,1 millimètre. Un second échantillon de 200 pièces métalliques fût exposé au traitement anti-corrosif avant d'être immergé à son tour dans un bain pendant 24 heures. Cette fois-ci, la diminution moyenne de l'épaisseur fût de 9,1 millimètres avec un écart-type de 0,9 millimètres.
- a) Estimez à l'aide d'un intervalle de confiance à 98%, quelle est la différence de diminution d'épaisseur entre les deux échantillons.
- b) Le traitement semble-t-il avoir bien diminué la corrosion moyenne?
- Suggestion : commencez par trouver les formules de distribution d'échantillonnage de la différence entre deux moyennes.
- 3.8. EXAMEN JANVIER 2016
- Un magasin vend des cartes mémoires MircoSD dont les capacités de stockage sont de respectivement 8Go, 16Go, 32Go et 64Go. Un client tire un échantillon de 2 cartes MicroSD par tirage i.i.d. dans cet ensemble muni d'une loi uniforme (avec remise, à chaque tirage chaque capacité de stockage a  $\frac{1}{4}$  d'être choisie). Soit  $m_x$  la moyenne de capacité de stockage des cartes MicroSD de l'échantillon,  $s_x^2$  la variance et  $s_{n-1}^2$  la variance corrigée.
- a) Ecrivez tous les échantillons possibles et à partir de là, calculez l'espérance et la variance de la variable  $m_x$ . (**3 points**)
- b) Calculez la moyenne et la variance de la capacité de stockage des cartes MicroSD dans la population. (**2 points**)
- c) L'espérance calculée au point a) est-elle égale à la moyenne calculée au point b)? Si oui, pourquoi? Sinon, quelle formule les relie? (**2 points**)
- d) Les variances calculées aux points a) et b) sont-elles égales? Si oui, pourquoi? Sinon, quelle formule les relie? (**2 points**)
- e) Peut-on utiliser les formules  $E\{s_x^2\} = \frac{n-1}{n}\sigma_{\mathcal{X}}^2$  et  $E\{s_{n-1}^2\} = \sigma_{\mathcal{X}}^2$  pour calculer les espérances de  $s_x^2$  et de  $s_{n-1}^2$ ? Justifiez. Si oui, calculez ces deux espérances. (**2 points**)
- f) Peut-on utiliser les formules  $V\{s_x^2\} = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma_{\mathcal{X}}^4$  et  $V\{s_{n-1}^2\} = \frac{2}{n-1}\sigma_{\mathcal{X}}^4$  pour calculer les variances de  $s_x^2$  et de  $s_{n-1}^2$ ? Justifiez. Si oui, calculez ces deux variances. (**2 points**)

g) Quel est l'intérêt de corriger la variance ? Quel est le désavantage ? (1 point)

Afin de préparer une nouvelle campagne de publicité, le magasin réalise un sondage auprès de ses clients afin d'essayer d'estimer la quantité de mémoire totale réellement utilisée par ceux-ci. Seules 11 personnes ont répondu au sondage. Voici les résultats : 22,774 ; 29,026 ; 24,184 ; 31,389 ; 36,620 ; 30,526 ; 31,890 ; 24,272 ; 26,488 ; 36,057 ; 29.534. On suppose que les mesures effectuées représentent un échantillon d'une population normale.

h) Trouvez un intervalle de confiance à 95% de la quantité de mémoire totale moyenne réellement utilisée par les clients. (2 points)

i) Même question en supposant que l'écart-type de la population vaut 5. (2 points)

j) L'intervalle de confiance calculé au point i) devait-il forcément être au moins aussi précis que celui calculé au point h) ? (2 points)

## Solutions des exercices suggérés

3.5.  $[0, 46; 0, 51]$

3.6. L'erreur quadratique vaut  $2 \frac{\sigma^4}{n+1}$ . Plus faible que celles de  $s_n^2$  et  $s_{n-1}^2$ .

3.7. a)  $[2, 8; 3, 4]$  b) oui

3.8. a) Il y a 16 échantillons différents :

(8, 8,)	(8, 16)	(8, 32)	(8, 64)
(16, 8,)	(16, 16)	(16, 32)	(16, 64)
(32, 8,)	(32, 16)	(32, 32)	(32, 64)
(64, 8,)	(64, 16)	(64, 32)	(64, 64)

Les moyennes de ces échantillons sont (dans le même ordre) :

8	12	20	36
12	16	24	40
20	24	32	48
36	40	48	64

$$E\{m_x\} = 30 \text{ Go} \quad V\{m_x\} = 230 \text{ Go}^2$$

b)  $\mu_{\mathcal{X}} = 30 \text{ Go} \quad \sigma_{\mathcal{X}}^2 = 460 \text{ Go}^2$

c) La moyenne des moyennes des échantillons  $E\{m_x\}$ , donne bien la moyenne de la population  $\mu_{\mathcal{X}}$ .

d) La variance des moyennes des échantillons  $V\{m_x\}$ , n'est pas égale à la variance de la population  $\sigma_{\mathcal{X}}^2$ . Ceci est logique, vu que le calcul de cette dernière se base sur chaque valeur de la population prise une seule fois, tandis que le calcul de chaque  $m_x$  se base sur des échantillons de taille 2, dont la moyenne a ainsi plus de chance de se rapprocher de la moyenne de la population. On observera donc moins d'écarts par rapport à la dite moyenne.

La formule du formulaire permet de relier les deux grandeurs correctement :

$$\frac{\sigma_{\mathcal{X}}^2}{n} = V\{m_x\} = 230$$

- e) Oui car ces formules sont valables quelque soit la loi de la variable parente.  
 $E\{s_x^2\} = 230Go^2 \quad E\{s_{n-1}^2\} = 460Go^2$
- f) On ne peut pas utiliser les formules du formulaire, on est pas dans le cas gaussien.
- g) L'intérêt de corriger la variance est de disposer d'un estimateur non-biaisé.  
 On remarque que cela vient au détriment de la variance de l'estimateur, qui est plus élevée dans le cas de  $s_{n-1}^2$  que de  $s_x^2$ .
- h) [26,23 Go ; 32,45 Go]
- i) [26,387 Go ; 32,297 Go]
- j) Le fait de connaître l'écart-type de la population permet en général de construire un IC plus précis. Par contre, si notre estimation de l'écart-type de la population est fortement sous-estimée, il se peut qu'on obtienne malgré tout un intervalle de confiance plus étroit !

## Loi du $\chi^2$ : densité de probabilité et fonction de répartition

