Logic

Répétition 6

22 octobre 2013

Théorème d'interpolation de Craig

Théorème d'interpolation de Craig :

Si $A \models B$ alors il existe une formule C tel que $A \models C$ et $C \models B$ avec C qui ne contient QUE des propositions communes à A et B.

Exercice 1. Soient deux formules

$A \triangleq p \wedge (r \vee q) \wedge t$ et $B \triangleq (p \vee r) \wedge (q \vee t)$

A-t-on

$A \models B$ ($\models A \Rightarrow B$) ? ou $B \models A$ ($\models B \Rightarrow A$) ?

Si l'un ou l'autre est vrai, trouver une formule interpolante.

Exercice 2. Soient deux formules

$A \triangleq [p \vee (q \wedge r)] \wedge (q \vee t)$ et $B \triangleq (s \vee r) \wedge q \wedge t \wedge p$

A-t-on

$A \models B$? ou $B \models A$?

Si l'un ou l'autre est vrai, trouver une formule interpolante.

Utiliser la méthode constructive présentée dans la démonstration. Donner aussi une démonstration plus intuitive. Que peut-on dire de l'unicité de l'interpolant ?

Exercice 3. Soient deux formules

$A \triangleq [(q \Rightarrow r) \wedge s]$ et $B \triangleq (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

A-t-on

$A \models B$? ou $B \models A$?

Si l'un ou l'autre est vrai, trouver une formule interpolante.

Exercices de réflexion

Exercice 4.

On dit qu'un ensemble A de formules du calcul propositionnel est indépendant si et seulement si, pour toute formule $G \in A$, G n'est pas conséquence logique de $A \setminus \{G\}$.

1. Les ensembles suivants sont-ils indépendants ?

   — $\{a \Rightarrow b, b \Rightarrow c, c \Rightarrow a\}$
   — $\{a \Rightarrow b, b \Rightarrow c, a \Rightarrow c\}$
   — $\{a \vee b, a \Rightarrow c, b \Rightarrow c, \neg a \Rightarrow (b \vee c)\}$
   — $\{a, b, a \Rightarrow c, c \Rightarrow b\}$
   — $\{a \Rightarrow (b \vee c), c \Rightarrow \neg b, b \Rightarrow (a \vee c), (b \wedge c) \equiv b, a \Rightarrow c, b \Rightarrow a\}$
   — $\{(a \Rightarrow b) \Rightarrow c, a \Rightarrow c, b \Rightarrow c, c \Rightarrow (b \Rightarrow a), (a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \equiv b)\}$

   Pour chacun d'eux, s'il n'est pas indépendant, déterminer un, et si possible, plusieurs, sous-ensemble(s) indépendant(s) qui lui soi(en)t logiquement équivalent(s).

2. L'ensemble vide est-il indépendant ? Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble contenant une unique formule soit indépendant.

3. Montrer que tout ensemble fini de formules admet au moins un sous-ensemble indépendant logiquement équivalent.

4. Montrer que si A est un ensemble indépendant, et si $A \not\models H$, alors $A \cup \{H\}$ n'est pas forcément indépendant.

5. Montrer que si B est un sous-ensemble indépendant maximal de A, alors B n'est pas forcément logiquement équivalent à A.

6. Montrer que, pour qu'un ensemble de formules soit indépendant, il faut et il suffit que chacun de ses sous-ensembles finis soit indépendant.

7. L'ensemble infini

   $$A \triangleq \{a_1, a_1 \wedge a_2, a_1 \wedge a_2 \wedge a_3, \ldots, a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n, \ldots\}$$

   admet-il un sous-ensemble indépendant logiquement équivalent ?
   (Les a_i sont des var. proposit.)

   Existe-t-il un ensemble indépendant qui lui soit logiquement équivalent ?

Exercices proposés

Exercice 5. Soient deux formules

- $A \triangleq (p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r)$
- $B \triangleq \neg p \Rightarrow r$

A-t-on

- $A \models B$?
- $B \models A$?

Si l'un ou l'autre est vrai, trouver une formule interpolante.

Exercice 6.

Pour

$$A \triangleq a \wedge (b \vee c) \quad \text{et} \quad B \triangleq a \vee (b \wedge c)$$

$$A \triangleq (p \Rightarrow q) \Rightarrow r \quad \text{et} \quad B \triangleq p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

$$A \triangleq (a \vee b \vee c) \wedge d \quad \text{et} \quad B \triangleq (a \vee b) \wedge c \wedge d$$

A-t-on

- $A \models B$?
- $B \models A$?

Si l'un ou l'autre est vrai, trouver une formule interpolante.