Logic

Répétition 7

30 octobre 2013

Théorème de définissabilité de Beth

Exercice 1. Démontrer la réciproque du théorème de définissabilité : pour toute formule A ne contenant ni q ni r, s'il existe une formule B ne contenant ni p, ni q, ni r telle que

$$A \Rightarrow (p \equiv B) \tag{1}$$

est une tautologie, alors

$$[A\,(p/q) \wedge A\,(p/r)] \Rightarrow (q \equiv r)$$

est une tautologie.

Exercice 2. Trouver la formule B qui définit p, avec

1. $A \triangleq u \equiv p$
2. $A \triangleq (u \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow v) \wedge (u \equiv v)$
3. $A \triangleq u \wedge v \wedge p$
4. $A \triangleq (u \Rightarrow p) \wedge (p \vee v) \wedge \neg\,(p \wedge v) \wedge (v \Rightarrow u)$
5. $A \triangleq (u \Rightarrow p) \wedge (v \Rightarrow p) \wedge (t \Rightarrow p) \wedge [\neg u \equiv (v \equiv \neg t)]$

Monter en détail que l'on se trouve bien dans les conditions nous permettant d'appliquer le théorème de définissabilité de Beth.

Exercices d'Interros

<u>**Exercice 3.**</u> (Interro 2006 Q2)
Soient A, B, C et D des formules quelconques. On définit

— $X : A \Rightarrow (B \Rightarrow D)$
— $Y : A \Rightarrow (C \Rightarrow D)$
— $U : A \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow D)$
— $V : A \Rightarrow ((B \vee C) \Rightarrow D)$

On demande d'énoncer et justifier toutes les relations de conséquence logique existant entre les formules U, V, X et Y.

<u>**Exercice 4.**</u> (Interro 2007 Q1)
Définir les notions d'ensemble finiment consistant, ensemble finiment consistant maximal et ensemble de Hintikka. Un ensemble finiment consistant est-il toujours de Hintikka ? Un ensemble finiment consistant maximal est-il toujours de Hintikka ? On justifiera les réponses.

<u>**Exercice 5.**</u> (Interro 2007 Q3)
Soit $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ une famille finie de formules propositionnelles sur un lexique Π ; soit v une interprétation sur Π. Construire une condition nécessaire et suffisante, aussi simple que possible, pour que l'interprétation v soit un modèle de la formule

$$A_1 \equiv (A_2 \equiv (A_3 \ldots (A_{n-1} \equiv A_n) \ldots)).$$

A quelle condition la formule

$$((\ldots((A_1 \oplus A_2) \oplus A_3) \ldots A_{n-1}) \oplus A_n),$$

dans laquelle $\oplus$ désigne le "ou" exclusif, est-elle logiquement équivalente à la formule précédente ?

On justifiera la réponse.

Exercices proposés

Exercice 6. (Interro 2008 Q3)
Supposons donnée une règle d'inférence correcte. Est-il possible de la rendre incorrecte en retirant une prémisse ? en retirant une prémisse contingente ? en retirant une prémisse inconsistante ? en retirant une prémisse valide ? en retirant une prémisse conséquence logique des autres prémisses ? en retirant une prémisse dont toutes les autres sont conséquences logiques ? Si la règle de départ est incorrecte, peut-on la rendre correcte en effectuant certaines des transformations décrites ci-dessus ?
Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 7. (Interro 2007 Q2)
Soient A, B, C et D des formules quelconques. On définit

— $X : A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg D)$
— $Y : A \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow C) \Rightarrow D)$
— $U : A \Rightarrow (C \Rightarrow D)$
— $V : A \Rightarrow ((B \vee C) \Rightarrow \neg D)$

On demande d'énoncer et justifier toutes les relations de conséquence logique existant entre les formules U, V, X et Y.