
Logic

Répétition 8

5 novembre 2013

Formes normales

Exercice 1. Mettre les formules suivantes sous forme normale disjonctive

$$A = \bigwedge_{1 \leq i < n} (p_i \Rightarrow p_{i+1})$$

$$B = A \wedge (p_n \Rightarrow p_1)$$

$$C = \bigwedge_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} (p_i \Rightarrow \neg p_j)$$

$$D = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \left(\bigvee_{j \neq i} p_j \right)$$

$$E = \left[\left(\bigvee_{1 \leq i \leq n} p_i \right) \equiv \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \left(\bigvee_{j \neq i} p_j \right) \right]$$

$$G = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \left(p_i \Rightarrow \bigvee_{j \neq i} p_j \right)$$

Résolution

Exercice 2.

Mettre la formule ϕ sous forme normale conjonctive et montrer qu'elle est inconsistante par la méthode de résolution.

$$\phi = \neg((q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)))$$

Exercice 3.

Soit

$$\phi = (((p \wedge q) \Rightarrow r) \vee ((q \Rightarrow p) \wedge \neg q)) \wedge (\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$$

Utiliser la méthode de résolution pour déterminer la consistance de ϕ .

Exercices

Exercice 4. (Interro 2001 Q4)

Ecrire une formule A exprimant qu'exactement deux des trois propositions p , q et r sont fausses et une formule B exprimant qu'au moins deux des trois propositions p , q et r sont fausses.

Que peut-on dire de la formule $A \Rightarrow B$?

Exercice 5. (Interro 2006 Q3)

Lors de la construction d'un tableau sémantique, l'étiquette d'un nœud devrait être $\{A, X\}$ mais, suite à une erreur d'écriture, cette étiquette est devenue $\{A, Y\}$. La construction du tableau s'achève sans autre erreur. Déterminer dans quelle mesure les conclusions tirées du tableau erroné restent valables si

1. $X \leftrightarrow Y$;
2. $X \models Y$ mais $Y \not\models X$;
3. $Y \models X$ mais $X \not\models Y$;
4. $A \wedge X \leftrightarrow A \wedge Y$ mais $X \not\models Y$ et $Y \not\models X$;
5. $A \vee X \leftrightarrow A \vee Y$ mais $X \not\models Y$ et $Y \not\models X$.

Exercice 6. (Interro 2008 Q3)

Supposons donnée une règle d'inférence correcte. Est-il possible de la rendre incorrecte en retirant une prémisse ? en retirant une prémisse contingente ? en retirant une prémisse inconsistante ? en retirant une prémisse valide ? en retirant une prémisse conséquence logique des autres prémisses ? en retirant une prémisse dont toutes les autres sont conséquences logiques ? Si la règle de départ est incorrecte, peut-on la rendre correcte en effectuant certaines des transformations décrites ci-dessus ?

Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 7. (Interro 2007 Q2)

Soient A, B, C et D des formules quelconques. On définit

- $X : A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg D)$
- $Y : A \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow C) \Rightarrow D)$
- $U : A \Rightarrow (C \Rightarrow D)$
- $V : A \Rightarrow ((B \vee C) \Rightarrow \neg D)$

On demande d'énoncer et justifier toutes les relations de conséquence logique existant entre les formules U, V, X et Y .

Exercice 8. (Interro 2007 Q4)

Soit Φ une formule construite sur le lexique $\Pi = \{a, b, c, \dots, y, z\}$ et ne comportant que les connecteurs $\wedge$ et $\vee$. A partir de Φ on construit les formules suivantes :

1. Φ_1 est obtenue en remplaçant toutes les occurrences de a par $(a \vee b)$.
2. Φ_2 est obtenue en remplaçant une seule occurrence de a par $(a \wedge b)$.
3. Φ_3 est obtenue en remplaçant simultanément toutes les occurrences de a par b et toutes les occurrences de b par a .

Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer si on a toujours, parfois ou jamais $\Phi_i \models \Phi$ et/ou $\Phi \models \Phi_i$. On justifiera les réponses.

Exercice 9. (Interro 2010 Q4)

Soit la règle d'inférence $\Gamma : \frac{A, B, C}{D}$

dans laquelle, A, B, C et D sont des formules propositionnelles. Soient les "variantes"

$$\begin{array}{lll} \Gamma_1 : \frac{A \wedge B, C}{D \vee C} & \Gamma_2 : \frac{A \Rightarrow B, A \wedge C}{C \wedge D} & \Gamma_3 : \frac{A, B, \neg C}{\neg D} \\ \Gamma_4 : \frac{A, B, \neg D}{\neg C} & \Gamma_5 : \frac{A, B}{C \Rightarrow D} & \Gamma_6 : \frac{A, B}{C \vee D} & \Gamma_7 : \frac{A, B}{C \wedge D} \end{array}$$

Si la règle Γ est correcte, que peut-on dire de ces variantes? Même question si Γ est incorrecte. On justifiera chaque réponse.

Exercice proposé

Exercice 10.

Soit

$$\phi = ((p \wedge q) \Rightarrow (\neg q \wedge r)) \Rightarrow (((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)))$$

Utiliser la méthode de résolution pour déterminer la consistance de ϕ .