Préparation de l'examen écrit (juin 2013)

Nous fournissons ci-dessous une liste de sujets relatifs à la matière vue au cours oral, afin de faciliter la préparation de la partie "théorie" de l'examen écrit. Les questions posées porteront chacune sur un seul de ces sujets. Une question comportera typiquement trois parties

1. *On vous demandera d'énoncer la définition d'une notion importante, et/ou d'une propriété importante.*
2. *On vous demandera d'illustrer ou bien d'esquisser la demonstration d'une proposition relative au point 1.*
3. *On vous demandera de répondre à une ou deux sous-questions simples.*

La liste ci-dessous fournit pour chaque chapitre la liste des questions à préparer. Notez qu'elle ne contient pas les sous-questions de type 3, qui ne seront révélées que lors de l'examen.

Afin de préparer l'examen, nous vous recommandons d'utiliser le syllabus dans la version la plus récente, disponible sur la page web du cours, ainsi que l'ensemble des transparents utilisés pour le cours oral. Ces transparents contiennent en effet des éléments **complémentaires** *au syllabus pour certaines parties de la matière, telles que des exemples ou bien les démonstrations de certaines propriétés.*

- Chapitre 1

Q1. Problème de prédiction, diagnostic, décision séquentielle

1. Définir ces trois types de problèmes.
2. Donner un exemple pratique pour chacun, en définissant les v.a. à modéliser et les grandeurs qui sont à déterminer.

- Chapitre 2

Q2. Espace de probabilité

1. Définir la notion d'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ en précisant les propriétés fondamentales T1, T2, T3 qui doivent être vérifiées pour la σ-algèbre $\mathcal{E}$ et en précisant les axiomes K1, K2 et K3 qui définissent la notion de mesure de probabilité P.
2. Décrire cet espace pour le problème du triple lancer de pièce, ou bien pour le double lancer de dés.

Q3. Probabilité conditionnelle

1. Définir la notion en précisant ses conditions d'existance.
2. Démontrer qu'à B fixé dans $\mathcal{E}$, la grandeur $P(A|B)$ est bien définie $\forall A \in \mathcal{E}$ et obéit aux axiomes K1, K2, et K3.

Q4. Indépendance de deux événements

1. Donner les deux définitions de la notion d'indépendance entre deux événements.
2. Démontrer que la seconde définition implique bien la première, et expliquer pourquoi cette seconde définition est plus générale.

Q5. Indépendance de plus de deux événements

1. Donner la définition de la notion d'indépendance mutuelle de plusieurs événements, et la notion d'indépendance deux à deux de plusieurs événements.
2. Démontrer que l'indépendance mutuelle est une condition plus restrictive que l'indépendance deux à deux, en donnant un exemple où la seconde est vérifiée mais pas la première.

Ex.2

Q6. Formules de Bayes

1. Enoncer la première formule de Bayes et le théorème des probabilités totales dans la version 1 et 2.
2. Démontrer à partir de là la seconde formule de Bayes.

Q7. Espaces de probabilités produits

1. Définir le produit $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ de deux espaces de probabilité $(\Omega_1, \mathcal{E}_1, P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{E}_2, P_2)$.
2. Démontrer que $\mathcal{E}$ ainsi définie vérifie bien T1, T2, T3 et démontrer que la mesure P ainsi définie vérifie bien K1, K2, K3.

- Chapitre 3

Q8. Notion de variable aléatoire

1. Définir la notion de variable aléatoire relative à un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{E}, P)$.
2. Définir la mesure $P_{\mathcal{X}}$ induite sur $(\Omega_{\mathcal{X}}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}})$ par la v.a. et montrer qu'elle satisfait nécessairement aux axiomes K1, K2 et K3. Ou bien, définir l'ensemble $\mathcal{E}_{\Omega/\mathcal{X}}$ induit sur Ω et montrer qu'il s'agit bien d'une σ-algèbre.

Q9. Variables aléatoires réelles

1. Définir la notion générale de v.a. réelle, et sa fonction de répartition. Définir la notion de v.a. réelle continue et sa densité.
2. Montrer que la fonction de répartition conjointe de deux v.a. réelles se factorise en le produit des deux fonctions de répartition lorsque ces variables sont indépendantes; expliquer pourquoi il en est de même pour les densités lorsque les deux variables sont aussi conjointement continues.

Q10. Notion d'espérance mathématique

1. Donner la définition mathématique rigoureuse (en trois étapes) de la notion d'espérance mathématique.
2. Montrer que dans le cas particulier où Ω est fini, cette définition coïncide bien avec la formule $E\{\mathcal{X}\} = \sum_{\omega \in \Omega} \mathcal{X}(\omega) P(\omega)$, et dans ce même cas particulier montrer que l'espérance de la somme de deux v.a. est égale à la somme de leurs espérances, et que l'espérance du produit d'une v.a. réelle par une constante est égale au produit de l'espérance de cette v.a. par cette constante.

Q11. Notion de variance

1. Donner la définition mathématique de la notion de variance d'une v.a. réelle, et énoncer les principales propriétés de cette grandeur : variance de $a\mathcal{X}$, de $a + \mathcal{X}$, de $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$, etc.
2. Montrer que si $E\{\mathcal{X}^2\}$ est finie, alors l'espérance de $\mathcal{X}$ doit également être finie, de même que la variance. Ou bien, montrer que lorsque la variance est finie, alors l'inégalité de Tchebyshev doit être satisfaite, en la déduisant de l'inégalité de Markov.

- Chapitre 4

Q12. Couples de variables aléatoires

1. Donner la définition de la densité conjointe de deux v.a. discrètes quelconques, et celle de la densité conditionnelle de l'une étant donnée l'autre. Donner les formules analogues pour des v.a. réelles conjointement continues.
2. Montrer qu'on obtient bien la densité (marginale) de l'une des deux variables par marginalisation de l'autre dans la densité conjointe : sommation dans le cas discret et intégration dans le cas continu.

Q13. Notion d'espérance conditionnelle ($\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ à valeurs réelles)

1. Donner la définition de l'espérance conditionnelle $E\{\mathcal{Y}|\mathcal{X}\}$ respectivement dans le cas où les deux v.a. sont discrètes et dans le cas où elles sont conjointement continues. Enoncer les 4 propriétés fondamentales de cette notion.
2. Dans le cas particulier où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, démontrer la propriété de linéarité, le théorème de l'espérance totale, et le fait que lorsque $\mathcal{Y}$ est une fonction de $\mathcal{X}$ on a $E\{\mathcal{Y}|\mathcal{X}\} = \mathcal{Y}$.

Q14. Notion de variance conditionnelle

1. Donner la définition de la variance conditionnelle $V\{\mathcal{Y}|\mathcal{X}\}$ respectivement dans le cas où les deux v.a. sont discrètes et dans le cas où elles sont conjointement continues. Enoncer les 3 propriétés fondamentales de cette notion.
2. Dans le cas particulier où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, démontrer le théorème de la variance totale, montrer que la variance conditionnelle est nulle lorsque $\mathcal{Y}$ est une fonction de $\mathcal{X}$, et montrer qu'elle est constante lorsque $\mathcal{Y} \perp \mathcal{X}$.

Q15. Synthèse géométrique

1. Décrire la démarche de construction de L^2_Ω et définir les sous-espaces $L^2_{\mathcal{X}}$, $L^2_{\text{aff}(\mathcal{X})}$, et $L^2_{1_\Omega}$.
2. Montrer graphiquement les relations entre les variables aléatoires $\mathcal{Y}$, $E\{\mathcal{Y}\}1_\Omega$, et $E\{\mathcal{Y}|\mathcal{X}\}$, et expliquer sur cette base le théorème de l'espérance totale et le théorème de la variance totale.

Q16. Ensemble de p variables aléatoires discrètes

1. Définir la notion de densité conjointe de p variables aléatoires discrètes, puis la notion de densité conditionnelle d'un sous-ensemble de ces v.a. étant donné un autre sous-ensemble de v.a. disjoint du premier.
2. Démontrer que l'opération de marginalisation est commutative, et expliquer en quel sens l'opération de conditionnement par rapport à plusieurs v.a. est indépendante de l'ordre dans lequel on procède.

Q17. ~~Indépendance conditionnelle~~ Question supprimée pour 2012

1. ~~Définir la notion d'indépendance conditionnelle~~ $\cancel{(\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}|\mathcal{Z})}$ ~~pour trois variables discrètes.~~
2. ~~Enoncer, démontrer et représenter graphiquement les trois factorisations de la loi~~ $\cancel{P_{\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}}}$ ~~qui sont équivalentes à cette propriété d'indépendance conditionnelle en discutant le cas où~~ $\cancel{P_{\mathcal{Z}}}$ ~~est nulle pour certaines valeurs de~~ $\cancel{\mathcal{Z}}$~~.~~

■ Chapitre 5

Q18. Vecteurs aléatoires gaussiens

1. Définir la notion de vecteur aléatoire gaussien, en expliquant comment ceux-ci sont caractérisés par leur vecteur moyen et leur matrice de covariance.
2. Donner la formule de l'espérance conditionnelle dans le cas général, et montrer ce qu'elle devient dans le cas de dimension $p = 2$. Démontrer la formule dans ce dernier cas, et discuter ce que cela implique du point de vue de l'approximation d'une variable gaussienne par une fonction affine d'une autre variable gaussienne, lorsque les deux variables sont conjointement gaussiennes (y compris le cas limite où la densité conjointe n'existe pas).