Eléments du calcul des probabilités

Examen du 5 juin 2012 - Théorie

Question 1

Notion d'espace de probabilité

1. Définir la notion d'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ en précisant les propriétés fondamentales T1, T2, T3 qui doivent être vérifiées pour la σ-algèbre $\mathcal{E}$ et en précisant les axiomes K1, K2 et K3 qui définissent la notion de mesure de probabilité P.

2. Décrire cet espace pour le problème du double lancer de dés (les 2 dés sont à 6 faces, équilibrés, et n'ont pas d'interaction physique).

3. A partir de T1, T2, et T3, montrer que l'ensemble vide $\emptyset$ fait partie de toute σ-algèbre $\mathcal{E}$, ensuite à partir de K1, K2 et K3 montrez que $P(\emptyset) = 0$.

Question 2

Notion d'espérance mathématique

1. Donner la définition mathématique rigoureuse (en trois étapes) de la notion d'espérance mathématique.

2. Montrer que dans le cas particulier où Ω est fini, cette définition coïncide bien avec la formule $E\{\mathcal{X}\} = \sum_{\omega \in \Omega} \mathcal{X}(\omega) P(\omega)$, et dans ce même cas particulier montrer que l'espérance de la somme de deux v.a. est égale à la somme de leurs espérances, et que (donc) l'espérance du produit d'une v.a. réelle par une constante est égale au produit de l'espérance de cette v.a. par cette constante.

3. Pour le double lancer de dés de la question 1, soient les v.a. $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ dont les valeurs sont respectivement le chiffre lu sur la face supérieure de premier et du second dé.

   (a) Calculer l'espérance de la variable $\mathcal{Z}_1 = \pi\mathcal{X} + 5\mathcal{Y}$, en expliquant votre raisonnement.

   (b) Calculer l'espérance de la variable $\mathcal{Z}_2 = \mathcal{X}\mathcal{Y}$, le produit des deux variables $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, en expliquant votre raisonnement.

Eléments du calcul des probabilités

Examen du 5 juin 2012 - Théorie

Question 3

Notion d'espérance conditionnelle ($\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ à valeurs réelles)

1. Donner la définition de l'espérance conditionnelle $E\{\mathcal{Y}|\mathcal{X}\}$ respectivement dans le cas où les deux v.a. sont discrètes et dans le cas où elles sont conjointement continues. Enoncer les 4 propriétés fondamentales de cette notion.

2. Dans le cas particulier où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, démontrer le théorème de l'espérance totale.

3. Pour le double lancer de dés de la question 1, soient les v.a. $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ dont les valeurs sont respectivement le chiffre lu sur la face supérieure du premier et du second dé.

   (a) Donner l'expression des variables $\mathcal{Z}_3 = E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}$, $\mathcal{Z}_4 = E\{\mathcal{Y}|\mathcal{Y}\}$, et $\mathcal{Z}_5 = E\{\mathcal{X}+\mathcal{Y}|\mathcal{Y}\}$, en expliquant votre raisonnement.

   (b) Que vaut $\mathcal{Z}_5(\omega)$ lorsque $\omega = (2,3)$?

   (c) Donner l'expression de $\mathcal{Z}_6 = E\{\mathcal{X}|\mathcal{X}+\mathcal{Y}\}$, en expliquant votre raisonnement.

   (d) Que vaut $\mathcal{Z}_6(\omega)$ lorsque $\omega = (2,3)$?