Eléments du calcul des probabilités
Examen du 30 mai 2014 - Théorie

Question 1

Notion de probabilité conditionnelle (20 points)

1. Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ quelconque et deux événements $A, B \in \mathcal{E}$. Définir les probabilités conditionnelles $P(A|B)$ et $P(B|A)$ en précisant leurs conditions d'existence.

2. Soit $E \in \mathcal{E}$ tel que $P(E) \neq 0$. Montrer que la fonction Q définie sur $\mathcal{E}$ par $Q(A) = P(A|E), \forall A \in \mathcal{E}$ est bien une mesure de probabilité sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{E})$, en démontrant que Q vérifie les trois axiomes de Kolmogorov.

3. Montrer que (sans oublier les deux réciproques !)

   (a) $[P(A|B) = P(A)] \Leftrightarrow [P(B|A) = P(B)]$.

   (b) $[P(A|B) = P(A)] \Leftrightarrow [P(A^c|B^c) = P(A^c)]$.

Question 2

Notions de variance et de covariance (20 points)

1. Définitions et propriétés de base:

   (a) Définir la notion générale de variance d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la notion générale de covariance de deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   (b) Enoncer les principales propriétés de ces grandeurs: variance de $a\mathcal{X}$, de $a + \mathcal{X}$, de $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$; covariance de deux v.a. indépendantes.

   (c) Exprimez $V\{\mathcal{X}\}$ en fonction de $E\{\mathcal{X}\}$ et de $E\{\mathcal{X}^2\}$, et justifiez cette expression.

2. On répète n fois le lancer de pile ou face (pièce équilibrée, résultats indépendants): soient les n v.a. $\mathcal{X}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ valant respectivement 0 ou 1 selon que le i-ème lancer donne respectivement pile ou face, ainsi que les n v.a. $\mathcal{Z}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \mathcal{X}_j$, $(k = 1, \ldots, n)$.

   (a) Calculer $E\{\mathcal{Z}_k\}$ et $V\{\mathcal{Z}_k\}$, $\forall k = 1, \ldots, n$.

   (b) Calculer $\text{cov}\{\mathcal{Z}_k; \mathcal{X}_i\}$, $\forall i, k \in \{1, \ldots, n\}$.

   Justifiez vos calculs.

Eléments du calcul des probabilités
Examen du 30 mai 2014 - Théorie

Question 3

Notion d'espérance conditionnelle (20 points) ($\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ à valeurs réelles)

1. Donner la définition de l'espérance conditionnelle $E\{\mathcal{Y}|\mathcal{X}\}$ respectivement dans le cas où les deux v.a. sont discrètes et dans le cas où elles sont conjointement continues. Enoncer les 4 propriétés fondamentales de cette notion.

2. Dans le cas particulier où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, démontrer le théorème de l'espérance totale.

3. Pour l'expérience du lancer de pile-ou-face de la question 2.2

   (a) Donnez l'expression de $E\{\mathcal{Z}_k|\mathcal{X}_i\}$, $\forall i, k \in \{1, \ldots, n\}$.

   (b) Donnez l'expression de $E\{\mathcal{Z}_k|\mathcal{Z}_{k-1}\}$, $\forall k \in \{2, \ldots, n\}$.

   Justifiez vos calculs.

Questions BONUS

Des réponses correctes à ces questions donnent pour chacune deux points supplémentaires

1. **BONUS de Q1:** Exprimer une condition nécessaire et suffisante sur l'événement E pour que $P(A|E) = P(A), \forall A \in \mathcal{E}$. Justifiez que la condition est suffisante, et justifiez qu'elle est aussi nécessaire.

2. **BONUS de Q2:** Montrer que si $\mathcal{X} \in L^2_\Omega$ (i.e. si $E\{\mathcal{X}^2\}$ est finie), alors $E\{\mathcal{X}\}$ et $V\{\mathcal{X}\}$ sont également finies (cf Chapitre 4).

3. **BONUS de Q3:** Donnez l'expression de $E\{\mathcal{Z}_k|\mathcal{Z}_{k-1}, \mathcal{Z}_{k-2}\}$, $\forall k \in \{3, \ldots, n\}$. Justifiez votre raisonnement.