Eléments du calcul des probabilités
Examen du 3 juin 2015 - Théorie

Question 1

Notion d'espace de probabilité (10+6+4 = 20 points)

1. Définir la notion d'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ en précisant les propriétés fondamentales T1, T2, T3 qui doivent être vérifiées pour la σ-algèbre $\mathcal{E}$ et en précisant les axiomes K1, K2 et K3 qui définissent la notion de mesure de probabilité P.

2. Montrer que pour tout espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{E}, P)$

   (a) $\emptyset \in \mathcal{E}$, en vous servant de T1 et de T2.

   (b) $P(\emptyset) = 0$, en vous servant de K2 et de K3.

3. Décrire $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ pour le problème du double lancer de dés (les 2 dés sont à 6 faces, équilibrés, et n'ont pas d'interaction physique).

Question 2

Notion d'espérance mathématique (10+6+4 = 20 points)

1. Donner la définition mathématique rigoureuse (en trois étapes) de la notion d'espérance mathématique.

2. Montrer que dans le cas particulier où Ω est fini, cette définition coïncide bien avec la formule $E\{\mathcal{X}\} = \sum_{\omega\in\Omega} \mathcal{X}(\omega)P(\omega)$, et dans ce même cas particulier montrer que l'espérance de la somme de deux v.a. est égale à la somme de leurs espérances.

3. Pour le double lancer de dés de la question 1, soient les v.a. $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ dont les valeurs sont respectivement le chiffre lu sur la face supérieure de premier et du second dé.

   (a) Calculer l'espérance de la variable $\mathcal{Z}_1 = \pi\mathcal{X} + 5\mathcal{Y}$, en expliquant votre raisonnement.

   (b) Calculer l'espérance de la variable $\mathcal{Z}_2 = \mathcal{X}\mathcal{Y}$, le produit des deux variables $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, en expliquant votre raisonnement.

Eléments du calcul des probabilités
Examen du 3 juin 2015 - Théorie

Question 3

Vecteurs aléatoires gaussiens (10+10 = 20 points)

1. Notion générale

   (a) Définir la notion générale de vecteur aléatoire gaussien $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ de dimension $p \geq 2$, énoncer la condition nécessaire et suffisante pour que la densité conjointe existe, et donner l'expression de cette densité conjointe.

   (b) Donner les formules de l'espérance et de la variance d'une combinaison linéaire $\mathcal{Z} = a^T \boldsymbol{\mathcal{X}}$ des composantes de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, et expliquer pourquoi un vecteur aléatoire gaussien est entièrement caractérisé par son vecteur moyen et sa matrice de covariance.

   (c) Donner les formules de l'espérance et de la matrice de covariance du sous-vecteur $\boldsymbol{\mathcal{X}}_1$ composé des k premières composantes de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$. Expliquer pourquoi lorsque $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ admet une densité, alors le sous-vecteur $\boldsymbol{\mathcal{X}}_1$ en admet également une.

2. Dans le cas où $p = 2$ et $k = 1$ (poser que $\boldsymbol{\mathcal{X}} = [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]^T$)

   (a) En supposant que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont conjointement continues et conjointement gaussiennes, déterminer la densité conditionnelle $f_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}(x|y)$ en expliquant votre raisonnement.

   (b) Déduisez de l'expression de $f_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}(x|y)$ l'expression de $E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}$ et celle de $V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}$.

   (c) Enoncer les différents cas où la densité conjointe n'existe pas, et ce que deviennent alors la "densité conditionnelle", l'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle du point 2(b).