Introduction aux processus stochastiques
Rappel de probabilités

François Schnitzler, Louis Wehenkel

Université de Liège

Février 2010

Informations pratiques

Contact et notes de cours :

- Notes : www.montefiore.ulg.ac.be/˜lwh/ProcStoch/
- Répétitions : www.montefiore.ulg.ac.be/˜schnitzl/Students.html
- Répétitions : fschnitzler@ulg.ac.be

Organisation du cours :

- Cours théorique plus séances de répétitions
- Travail pratique Mathlab, Examen écrit
- Aujourd'hui : rappel de probabilités (voir “Appendices communs aux cours de méthodes stochastiques”)

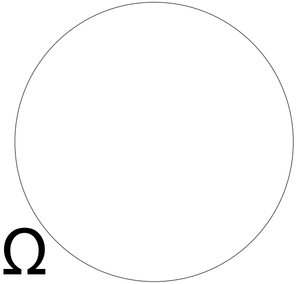
Sommaire

Les probabilités permettent de modéliser des incertitudes

- La théorie des probabilités permet de modéliser les phénomènes faisant intervenir le hasard et de formaliser le raisonnement en présence d'incertitudes
- La statistique consiste à recueillir et analyser des observations de systèmes physiques pour construire ou valider des modèles probabilistes
- Aujourd'hui : rappel de probabilité

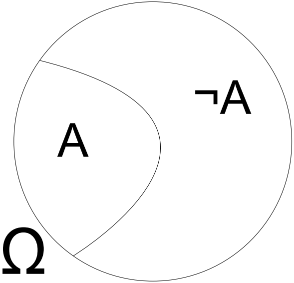
Expérience aléatoire

- Expérience dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat $\Leftrightarrow$ produit des résultats différents dans des conditions apparemment identiques
- Exemple : lancer d'un dé
- Ω = ensemble des résultats possibles



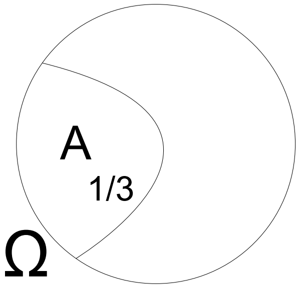
Evénement

- Sous-ensemble “observable” de Ω
- Correspond à une assertion logique vérifiable relative au résultat d’une expérience
- Exemple : le nombre obtenu est supérieur à 2



Probabilité

- Mesure de l'importance de l'événement
- Associe à un événement un nombre qui représente le degré de certitude de sa réalisation



Espace probabilisé

Un triplet $(\Omega, \varepsilon, P(.))$,

- ε est une σ-algèbre
- la loi $P(.)$ vérifie les axiomes de Kolmogorov

Notations :

- Ω : Ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire
- ω, ω_i... : Eléments de Ω
- ε : Ensemble de sous-ensembles de Ω (les événements)
- A, B, C... : Eléments de ε
- $P(.)$: loi (ou mesure) de probabilité, associant à chaque $A \in \varepsilon$ un nombre $\in [0, 1]$

σ-algèbre

Un σ-algèbre ε d'événements défini sur Ω vérifie les propriétés suivantes :

- $\Omega \in \varepsilon$
- $A \in \varepsilon \Rightarrow \neg A \in \varepsilon$
- $\forall A_1, A_2, ... \in \varepsilon$ (en nombre fini ou dénombrable) : $\bigcup_i A_i \in \varepsilon$

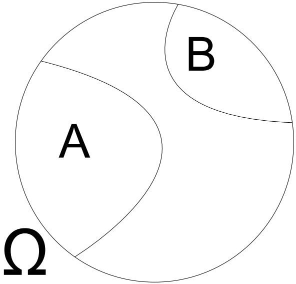
Dans ce cas, (Ω, ε) est appelé "espace mesurable".

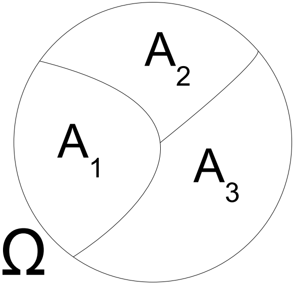
Système complet d'événements

NB : Deux événements A et B incompatibles sont deux événements tels que $A \cap B = \Phi$.

A_i, ..., A_n forment un système complet d'événements si :

- $\forall i, j \neq i$, A_i est incompatible avec A_j
- $\bigcup_i^n A_i = \Omega$





Axiomes de Kolmogorov

- $P(A) \in [0,1]\,, \forall A \in \varepsilon$
- $P(\Omega) = 1$
- $\forall A_1, A_2, ... \in \varepsilon$ incompatibles : $P(\bigcup_i A_i) = \sum P(A_i)$

Conséquences :

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\neg A) = 1 - P(A)$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$

Axiomes de Kolmogorov

- $P(A) \in [0, 1]\,, \forall A \in \varepsilon$
- $P(\Omega) = 1$
- $\forall A_1, A_2, \ldots \in \varepsilon$ incompatibles : $P(\bigcup_i A_i) = \sum P(A_i)$

Conséquences :

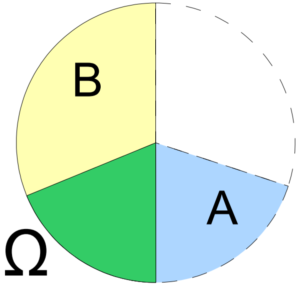
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\neg A) = 1 - P(A)$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$

Définitions

Probabilité conditionnelle

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{(si } P(B) > 0\text{)}$$

- Notation : $P(A|B)$ = probabilité que $\omega \in A$ étant donné que $\omega \in B$
- Incertitude sur la réalisation de A, en supposant que B est vrai
- Revient à restreindre l'univers à B
- $P(.|B)$ définit une loi de probabilité (conditionnelle) sur (Ω, ε)

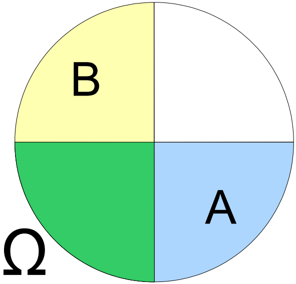


Définitions

Evénements indépendants

$A \perp B \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

- Notation : $A \perp B$
- $A \perp B \Leftrightarrow B \perp A$
- Si $P(B) > 0$, $A \perp B \Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$
- (NB : Si $P(B) = 0$, alors $\forall A$ on a $A \perp B$)



Résultats fondamentaux

Théorème de Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Théorème des probabilités totales :

Soit $B_1, B_2, \ldots, B_n$ un système complet d'événements, alors
$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$

Variable aléatoire

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \varepsilon, P(.))$ et (Ω', ε') un espace mesurable,
$f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est une variable aléatoire si
$\forall A' \in \varepsilon' : \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A'\} \in \varepsilon$.

$\Rightarrow$ On dit que $f(.)$ est $(\varepsilon, \varepsilon')$-mesurable

Espace fini

Dans le cas d'un espace fini :

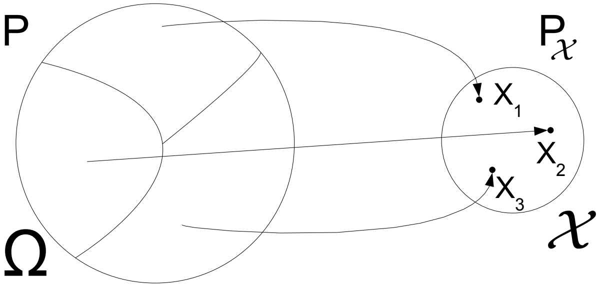
- Nombre fini d'événements élémentaires
- Utilisation du σ-algèbre $\varepsilon = 2^{\Omega}$

De plus,

- toutes les fonctions ont un espace image Ω' fini, et donc sont toutes $(2^{\Omega}, 2^{\Omega'})$-mesurables
- soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire sur Ω fini. On dit que $\mathcal{X}$ est une variable aléatoire discrète et on dénote par $\{X_i, ..., X_n\}$ ses valeurs possibles
- $\{X_i, ..., X_n\}$ représente également les sous-ensembles de Ω, et définit un système complet d'événements

Loi de probabilité sur les variables aléatoires

La variable aléatoire est une fonction mesurable
$\Rightarrow$ elle induit donc une mesure de probabilité $P_{\mathcal{X}}$ sur $(\mathcal{X},\varepsilon')$:
$P_{\mathcal{X}}(A') = P(\{\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \in A'\})$



Opérations sur les variables aléatoires

Composition : Si $\mathcal{X}(.)$ est une variable aléatoire sur Ω et $\mathcal{Y}(.)$ sur $\mathcal{X}$ également, alors $\mathcal{Y}(\mathcal{X}(.))$ est également une variable aléatoire sur Ω

Concaténation : Soit $\mathcal{X} = \{X_1, ...X_n\}$ et $\mathcal{Y} = \{Y_1, ...Y_n\}$ défini sur Ω, la concaténation $\mathcal{Z} = \mathcal{X}\mathcal{Y}$ définie sur Ω par
$\mathcal{Z}(\omega) = (\mathcal{X}(\omega), \mathcal{Y}(\omega)) \Rightarrow P(\mathcal{Z}) = P(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

Indépendance : $(\mathcal{X} \perp \mathcal{Y})$ ssi $\forall i \leq n, j \leq m : X_i \perp Y_j$
$\Leftrightarrow P(X_i, Y_j) = P(X_i)P(Y_j) \Leftrightarrow P(X_i) = P(X_i|Y_j)$ (avec $P(Y_j) > 0$)

Loi conjointe

Une variable aléatoire est souvent définie par une loi conjointe de variables aléatoires.

	Y_1	$\cdots$	Y_j	$\cdots$	Y_m	
X_1			$\vdots$			
$\vdots$			$\vdots$			
X_i	$\cdots$	$\cdots$	$p_{i,j}$	$\cdots$	$\cdots$	$p_{i,.}$
$\vdots$			$\vdots$			
X_n			$\vdots$			
			$p_{.,j}$			

- $p_{(i,.)} \equiv P(X_i) \equiv P(\mathcal{X} = X_i)$
- $p_{(.,j)} \equiv P(Y_j) \equiv P(\mathcal{Y} = X_j)$
- $p_{(i,j)} \equiv P(X_i \cap Y_j) \equiv P(X_i, Y_j) \equiv P([\mathcal{X} = X_i] \wedge [\mathcal{Y} = Y_j])$

Loi conjointe

	Y_1	$\cdots$	Y_j	$\cdots$	Y_m	
X_1			$\vdots$			
$\vdots$			$\vdots$			
X_i	$\cdots$	$\cdots$	$p_{i,j}$	$\cdots$	$\cdots$	$p_{i,.}$
$\vdots$			$\vdots$			
X_n			$\vdots$			
			$p_{.,j}$			

Marginalisation

$P(\mathcal{Y}) = \sum_{X_i} P(\mathcal{Y}, X_i)$

Ensembles de variables aléatoires

- En pratique, une variable aléatoire représente un aspect mesurable (observable) élémentaire relatif à une expérience aléatoire
- Les aspects mesurables d'une expérience sont alors représentés par un ensemble de variables aléatoires
- Le raisonnement probabiliste permet d'exploiter les observations des valeurs de certaines variables aléatoires pour inférer les lois conditionnelles d'autres variables aléatoires
- Le but principal de ce cours est d'enseigner des méthodes systématiques permettant de réaliser ces inférences de manière efficace dans des problèmes complexes