

# Introduction aux processus stochastiques

## Leçon 1

Louis Wehenkel

Département EEI  
Université de Liège

Montefiore - Liège - 7/2/2012

Find slides: <http://montefiore.ulg.ac.be/~lwh/ProcStoch/>

Objectifs de ce cours

Notion de processus aléatoire et exemples

Organisation et plan du cours

Rappels de probabilités

Perspectives

## Objectifs de ce cours

*Construire et exploiter des modèles de systèmes partiellement connus ou sujets à des perturbations aléatoires.*

- ⇒ Modèles dynamiques stochastiques (Processus aléatoires)
  - ⇒ Bases de l'inférence probabiliste (Estimation, prédiction, filtrage)
  - ⇒ Chaînes de Markov cachées (Espace d'état discret)
  - ⇒ Processus gaussiens (Filtre de Kalman)
  - ⇒ Perspectives (Aperçu de ce qui n'a pas été vu au cours)
-

# Objectifs de ce cours

*Construire et exploiter des modèles de systèmes partiellement connus ou sujets à des perturbations aléatoires.*

- ⇒ Modèles dynamiques stochastiques (Processus aléatoires)
- ⇒ Bases de l'inférence probabiliste (Estimation, prédiction, filtrage)
- ⇒ Chaînes de Markov cachées (Espace d'état discret)
- ⇒ Processus gaussiens (Filtre de Kalman)
- ⇒ Perspectives (Aperçu de ce qui n'a pas été vu au cours)

- 
- NB.**
- ▶ Beaucoup de problèmes pratiques sont concernés
  - ▶ Analyse et modélisation de systèmes complexes (biologie, physique, économie, ingénierie) ou en interaction avec un environnement mal connu (perturbations, bruits de mesures...)
  - ▶ Exemples...

# Notion de processus aléatoire

► Définition 1:

*Un processus aléatoire est une fonction du temps, produite dans le contexte d'une expérience aléatoire.*

P.ex.: musique produite par la fonction 'shuffle' sur IPOD

► Définition 2:

*Un processus aléatoire est une famille de variables aléatoires indicées par le temps.*

P.ex.: la position d'une mouche aux instants 0, 1, 2, 3 ...

# Notion de processus aléatoire

► Définition 1:

*Un processus aléatoire est une fonction du temps, produite dans le contexte d'une expérience aléatoire.*

P.ex.: musique produite par la fonction 'shuffle' sur IPOD

► Définition 2:

*Un processus aléatoire est une famille de variables aléatoires indicées par le temps.*

P.ex.: la position d'une mouche aux instants 0, 1, 2, 3 ...

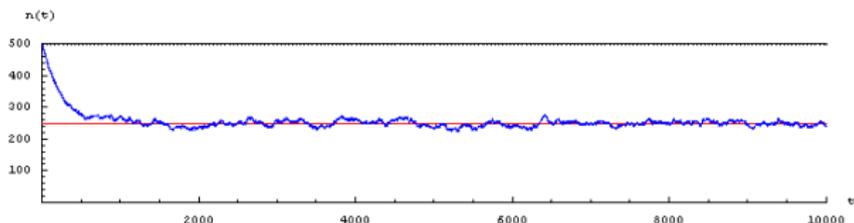
---

NB.

- Cette notion sera définie de manière plus précise ultérieurement.
- Bases: expérience aléatoire, probabilités, variables aléatoires.
- C'est moins compliqué et plus utile que cela n'en a l'air !

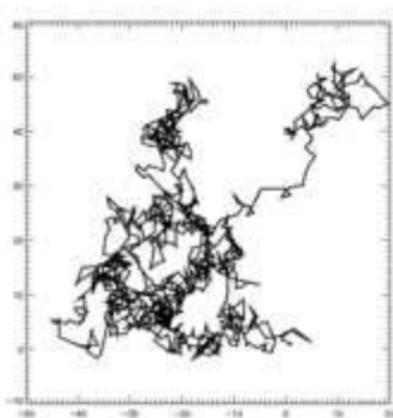
## Les 2 chiens et les 500 puces

- ▶ Deux chiens se rencontrent en  $t = 0$ . Le premier a sur lui  $n \in \mathbf{N}_0$  puces et le second aucune.
- ▶ A chaque pas de temps une puce au hasard (parmi les  $n$ ) décide de sauter du chien où elle se trouve sur l'autre.
- ▶ Soit  $n(t) \in \{0, \dots, n\}; t = 0, 1, 2, \dots$  le nombre de puces sur le premier chien au temps  $t$ .



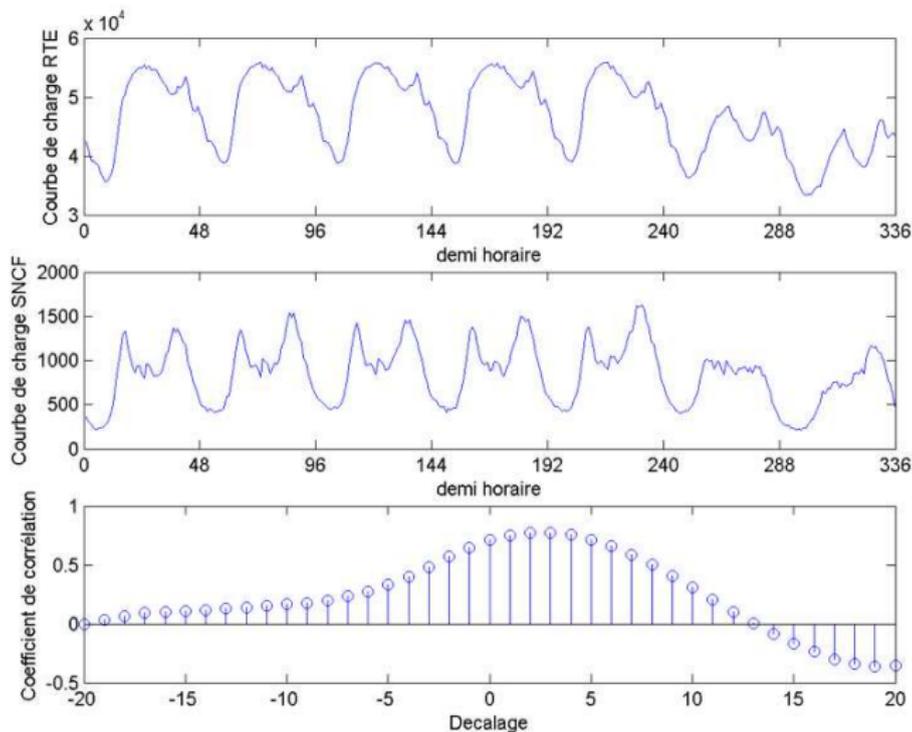
- ▶ Chaîne de Markov (temps discret, espace d'états  $\{0, \dots, n\}$ ).

# Mouvement brownien



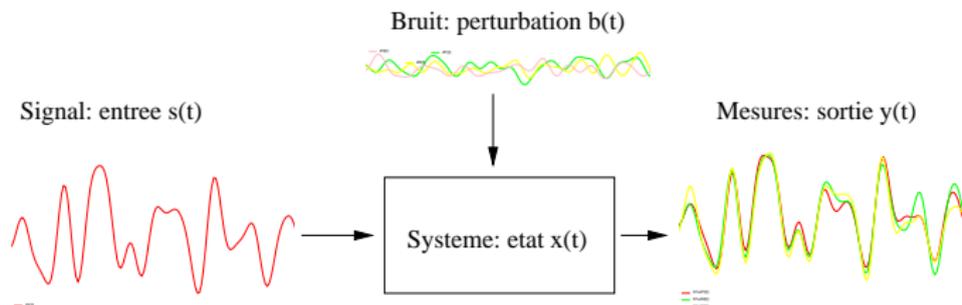
Processus de Markov (temps continu, espace d'états  $\mathbf{R}^2$ )

# Prédiction de la consommation électrique



## Filtrage et estimation d'état

- ▶ Système dynamique:  $\dot{x} = f(x, s, b); y = g(x, s, b)$



- ▶ On dispose d'un modèle du processus de bruit  $b(t)$  et du signal  $s(t)$ , on a une idée de  $x(0) \sim p(x)$ , et on peut mesurer  $y(t); t \in [0; T]$ .
- ▶ On souhaite estimer  $x(t); t \in [0; T]$ .

## Organisation du cours

- ▶ Cours oral et répétitions: les mardis (10h45-12h45), local A202 (B7b).
- ▶ Travail personnel: lectures, exercices MATLAB
- ▶ Supports: transparents, notes distribuées au fur et à mesure.
- ▶ Examen écrit: exercices uniquement.
- ▶ Contacts: Louis Wehenkel, Arnaud Joly
  - ▶ L.Wehenkel@ulg.ac.be : toutes questions relatives au oral.
  - ▶ a.joly@ulg.ac.be : travaux pratiques.
  - ▶ Site Web: <http://www.montefiore.ulg.ac.be/~lwh/ProcStoch/>

# Agenda des leçons et répétitions

- 7/2 **Cours 1:** Introduction, rappels de probas. **Répétition 1** (rappels)
- 14/2 **Cours 2:** Indépendance conditionnelle, chaînes de Markov
  - 21/2 Congé de Carnaval
- 28/2 **Répétition 2:** Indépendance conditionnelle, chaînes de Markov
  - 6/3 **Cours 3:** Chaînes de Markov cachées
  - 13/3 **Répétition 3:** Chaînes de Markov cachées,
  - 20/3 **Cours 4:** Vecteurs aléatoires gaussiens et estimation statique
  - 27/3 **Répétition 4:** Vecteurs aléatoires gaussiens et estimation statique, **Énoncé travail**
    - 3/4 Congé de Pacques
    - 10/4 Congé de Pacques
  - 17/4 **Cours 5:** Estimation dynamique, filtre de Kalman.
  - 24/4 **Répétition 5:** Estimation dynamique et filtre de Kalman, **Q & R travail**
    - 1/5 Fête du travail
  - 8/5 **Cours 6:** Suite et fin théorie. **Répétition 6, Q & R travail**
  - 15/5 **Répétition 7:** Préparation de l'examen écrit, **Remise du travail**

- ▶ Formalisation de la notion d'expérience aléatoire
  - ▶ Résultats possibles, événements, mesure de probabilité
- ▶ Notion de variable aléatoire
  - ▶ Notion générale, combinaisons, espérances, variances
- ▶ Conditionnement et indépendance
  - ▶ Mesures conditionnelles, lois conditionnelles

NB. Les rappels de probabilités sont l'occasion de rafraîchir les idées et d'introduire les notations utilisées dans ce cours. Nous conseillons aux étudiants de lire attentivement le chapitre 2 des appendices communs aux cours de méthodes stochastiques. (voir sur la page Web du cours: <http://www.montefiore.ulg.ac.be/~lwh/ProcStoch/>).

## Preview de quelques notions non vues dans ce cours

- ▶ Mesure continue de la dépendance entre variables aléatoires
  - ▶ Théorie de l'information
- ▶ Estimation des paramètres d'une distribution de probabilités
  - ▶ Approche du maximum de vraisemblance, approche bayésienne
- ▶ Vision géométrique du problème d'estimation/régression
  - ▶  $\Omega$  fini, respectivement  $\Omega$  infini
- ▶ Apprentissage automatique
  - ▶ supervisé et non-supervisé