# Convergence d'une série de Fourier

(Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, 1822)

Dr Guy-Bart STAN

14 Mai 2009

## Table des matières



# 1 Prérequis

- Notions de base en analyse fonctionnelle (fonction continue par morceaux, intégrale et intégrabilité au sens de Riemann, Théorème de Riemann-Lebesgue)
- Notions de base sur les nombres complexes (en pariculier, propriétés de l'exponentielle complexe)
- Définitions d'une suite, définition d'une série, définitions de la convergence ponctuelle et de la convergence uniforme

# 2 Définition du problème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $2\pi$-**périodique** ($f(x+2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$) et **intégrable (au sens de Riemann) sur tout intervalle borné.**

Rappel : Toute fonction $f(\cdot)$ bornée et continue par morceaux est intégrable au sens de Riemann sur n'importe quel intervalle borné.

*Remarques :*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe $f(x) = g(x) + ih(x)$ avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En particulier, si $f(\cdot)$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, alors par définition, $\int_a^b f(\phi)\,d\phi \triangleq \int_a^b g(\phi)\,d\phi + i\int_a^b h(\phi)\,d\phi$ .
2. Si $\tilde{f}(\cdot)$ est $T$-périodique (avec $T \in \mathbb{R}_0^+$) alors la fonction $f(x) = \tilde{f}\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ est $2\pi$-périodique (vu que $f(x+2\pi) = f(x)$, $\forall x$). On peut donc se limiter à l'étude fonctions périodiques de période $2\pi$.

3. Pour définir une fonction $f(\cdot)$ $2\pi$-périodique, il suffit de définir $f(\cdot)$ sur $[0, 2\pi[$ ou $]0, 2\pi]$ et de prolonger par périodicité sur tout $\mathbb{R}$.

**Définition 1** (Définition du problème)**.** Sous quelles conditions $f(x)$ peut-elle être décomposée en une série du type

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right), \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}, \forall n$$

ou, de façon équivalente [1], en une série du type

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n \in \mathbb{C}, \forall n\,?$$

(Typiquement, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ (appelée série trigonométrique bilatérale) sera utilisée dans les développements, car l'exponentielle complexe $e^{inx} \triangleq \cos(nx) + i\sin(nx)$ peut être "manipulée" mathématiquement plus facilement que les fonctions $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$. Par exemple, on a $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ tandis que $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ et $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.)

## 2.1 Coefficients de Fourier

Les coefficients $a_n$, $b_n$ et $c_n$ sont appelés *coefficients de Fourier* de $f(\cdot)$ et sont donnés par :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos(n\psi)\, d\psi,\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\sin(n\psi)\, d\psi, \tag{1}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{-in\psi}\, d\psi \tag{2}$$

(Ces intégrales existent vu que $f(\cdot)$ est supposée être intégrable (au sens de Riemann) sur tout borné.)

*Démonstration.* Nous allons démontrer la formule pour $c_n$. Les formules pour $a_n$ et $b_n$ s'obtiennent directement à partir de celle de $c_n$ en considérant $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i\,(c_n - c_{-n})$.

Si l'on suppose que $f(x)$ possède une décomposition en série de Fourier (et, en particulier, si on suppose que la série de Fourier converge absolument), on a :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

En multipliant cette égalité par $e^{-ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, et en intégrant sur $[-\pi, \pi]$ membre à membre, on obtient :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}\, dx$$

(Cette égalité requiert de pouvoir montrer que

$$\int_a^b \lim_{N\to\infty} h_N(x)\, dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^b h_N(x)\, dx \tag{3}$$

avec, dans ce cas ci, $h_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i(n-k)x}$, $a = -\pi$ et $b = \pi$. Nous admettrons, sans démonstration, que l'égalité (3) est vraie lorsque l'on suppose que la série de Fourier converge absolument, i.e. lorsque $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < \infty$.)

De plus,

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}\, dx = \left[\frac{1}{i(n-k)}e^{i(n-k)x}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{n-k}-(-1)^{n-k}}{i(n-k)} = 0, & \forall n \neq k \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, & n = k \end{cases}$$

Il en résulte que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx = 2\pi c_k,\; \forall k$$

CQFD □

1. $\cos(nx) = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$, $\sin(nx) = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$ $\Rightarrow c_0 = \frac{1}{2}a_0$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$, $n \in \mathbb{N}_+$.

### 2.2 Sommes partielles

**Définition 2** (Somme partielle d'indice $N$)**.**

$$S_N^f(x) \triangleq \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

où $a_n$, $b_n$ et $c_n$ sont les coefficients de Fourier de la fonction $f(\cdot)$ (voir (1) et (2)).

Le problème posé peut donc s'énoncer :

Sous quelles conditions la série $\lim_{N\to\infty} S_N^f(x)$ *converge*-t-elle ? vers $f(x)$ ?

### 2.3 Types de convergences

Plusieurs types de convergence peuvent être considérés. Par exemple :

- ***conv. ponctuelle (ou simple)***, (Lejeune Dirichlet, 1824) (Dirichlet, $S_N^f(x) - f(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$)
- ***conv. uniforme*** ($\sup_{x\in[-\pi,\pi]} \left|S_N^f(x) - f(x)\right| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$)
- ***conv. en norme*** (e.g., $S_N^f \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} f$ dans $\mathcal{L}_p$ : $\int_{-\pi}^{\pi} \left|S_N^f(\phi) - f(\phi)\right|^p d\phi \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$)
- ***conv. presque partout*** (Lennart Carleson, 1964)

Chacune de ces notions de convergence requiert des hypothèses différentes sur la fonction $f(\cdot)$, ainsi que différents types de preuves (dont certaines nécessitent des notions d'analyse fonctionnelle (très) avancées).

Dans cet exposé, nous allons nous concentrer sur l'une des convergences les plus simples : la *convergence ponctuelle.*

## 3 Convergence ponctuelle (Théorème de Dirichlet)

**Théorème 3** (Dirichlet, 1824)**.** *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est* $2\pi$*-périodique et* "lisse par morceaux" *sur* $\mathbb{R}$ *alors*

$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x_-) + f(x_+)\right), \quad f(x_\pm) = \lim_{h\to 0,\, h>0} f(x \pm h)$$

*pour tout* $x$*. En particulier,* $\lim_{N\to\infty} S_N^f(x) = f(x)$ *pour tout* $x$ *où* $f(\cdot)$ *est continue.*

### 3.1 Hypothèses du Théorème de Dirichlet

**Définition 4** (Fonction lisse par morceaux)**.** Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est "**lisse par morceaux**" **sur** $[a, b]$ si $f(\cdot)$ **et** $f'(\cdot)$ sont continues par morceaux sur $[a, b]$. En particulier, $f'(a_+)$ et $f'(b_-)$ existent.

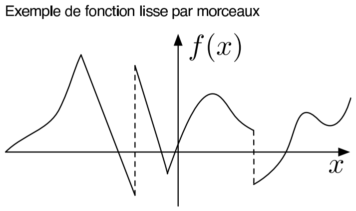
Plus précisément, $f'(\cdot)$ sera continue par morceaux si, aux points de discontinuité, $f(\cdot)$ admet des dérivées à gauche et à droite. Pour rappel, $f(\cdot)$ admet une dérivée à droite au point $x$, notée $f'(x_+)$, si $\lim_{h\to 0,\, h>0} \frac{f(x+h)-f(x_+)}{h}$ existe. De manière similaire, $f(\cdot)$ admet une dérivée à gauche au point $x$, notée $f'(x_-)$, si $\lim_{h\to 0,\, h<0} \frac{f(x+h)-f(x_-)}{h}$ existe.

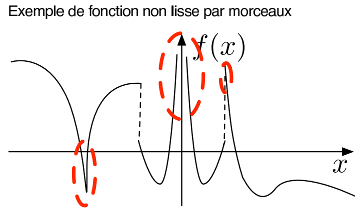
**Définition 5** (Fonction continue par morceaux)**.** Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est "**continue par morceaux**" **sur** $[a, b]$ si

1. $f$ est continue sur $[a, b]$ sauf évent. en un nb fini de pts $x_1, \ldots, x_k$ ;
2. en chacun des points $x_1, \ldots, x_k$ les limites à g. et à d. de $f$ existent : $f(x_{j-}) = \lim_{h\to 0,\, h>0} f(x_j - h)$ (lim g.) et $f(x_{j+}) = \lim_{h\to 0,\, h>0} f(x_j + h)$ (lim d.), $j = 1, \ldots, k$. En particulier, $f(a_+)$ et $f(b_-)$ existent.

**Définition 6.** Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue (resp. lisse) par morceaux **sur** $\mathbb{R}$ si elle est continue (resp. lisse) par morceaux sur tout intervalle borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

*Remarque* : Les hypothèses du Théorème de Dirichlet ne peuvent pas être relaxées facilement. Plus précisément, le *contre-exemple de Du Bois-Reymond* fournit un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ pour laquelle sa série de Fourier diverge (voir [2, chap. 18]).




*Exemple* 7 (Du Bois-Reymond, 1873). Il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $2\pi$-périodique et continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\limsup_{N\to\infty} \left| S_N^f(0) \right| = \infty$.

En particulier, le Théorème de Dirichlet n'est pas valable dans le cas général de fonctions qui sont uniquement $2\pi$-périodiques et intégrables au sens de Riemann.

## 3.2 Preuve du Théorème de Dirichlet

*Démonstration.* 1. (Exercice 1) $S_N^f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\phi) D_N(\phi)\, d\phi$ (produit de convolution) avec $D_N(\phi) \triangleq \sum_{n=-N}^{N} e^{in\phi}$ (appelé "*noyau de Dirichlet*" d'indice $N$)

2. (Exercice 2) $D_N(\phi) = \frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}}{e^{i\phi}-1} = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\phi\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}$, $\phi \neq 0$ ; $D_N(0) = 2N+1$

3. (Exercice 3) $\forall N$ : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_N(\phi)\, d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_N(\phi)\, d\phi = \frac{1}{2}$
Utilisant 3., on a :
$\frac{1}{2} f(x_-) = \frac{f(x_-)}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_N(\phi)\, d\phi$, et $\frac{1}{2} f(x_+) = \frac{f(x_+)}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_N(\phi)\, d\phi$.
Dès lors, par 1., on obtient :

$$\begin{aligned} & S_N^f(x) - \frac{1}{2}\left(f(x_-) + f(x_+)\right) \\ = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \left(f(x+\phi) - f(x_-)\right) D_N(\phi)\, d\phi \\ + & \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left(f(x+\phi) - f(x_+)\right) D_N(\phi)\, d\phi \end{aligned}$$

□

*Démonstration.* Utilisant 2., on obtient :

$$S_N^f(x) - \frac{1}{2}\left(f(x_-) + f(x_+)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\left(e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}\right) d\phi$$

avec $g(\phi) \triangleq \begin{cases} \frac{f(x+\phi)-f(x_-)}{e^{i\phi}-1}, & -\pi \le \phi < 0 \\ \frac{f(x+\phi)-f(x_+)}{e^{i\phi}-1}, & 0 < \phi \le \pi \end{cases}$. La fonction $g(\cdot)$ est bornée et continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ vu que $f(\cdot)$ est lisse par morceaux sur $\mathbb{R}$, et que

$$\begin{aligned} g(0_-) &= \lim_{\phi\to 0_-} \frac{f(x+\phi) - f(x_-)}{e^{i\phi}-1} = \lim_{\phi\to 0_-} \frac{\frac{f(x+\phi)-f(x_-)}{\phi}}{\frac{e^{i\phi}-1}{\phi}} = \frac{f'(x_-)}{i} \\ g(0_+) &= \cdots = \frac{f'(x_+)}{i} \end{aligned}$$

Par définition, les coefficients de Fourier de $g(\cdot)$ sont donnés par $C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) e^{-in\phi}\, d\phi$, et on a donc :

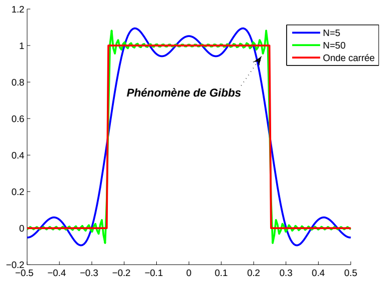
$$\lim_{N\to\infty}\left(S_N^f(x) - \frac{1}{2}\left(f(x_-) + f(x_+)\right)\right) = \lim_{N\to\infty}\left(C_{-(N+1)} - C_N\right)$$

Par application du Théorème de *Riemann-Lebesgue* à la fonction $g(\cdot)$, on obtient :

$$\lim_{N\to\pm\infty} C_N = 0.$$

CQFD □

(La dernière étape peut également être prouvée en utilisant l'*inégalité de Bessel* (introduite plus loin).)




## 3.3 Théorème de Riemann-Lebesgue

**Théorème 8** (Riemann-Lebesgue, sans démonstration)**.** *Si* $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ *est une fonction intégrable (au sens de Riemann) sur le fermé* $[a,b]$*, alors*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \int_a^b g(\phi)e^{-in\phi}\, d\phi = 0.$$

Une conséquence importante du Théorème de Riemann-Lebesgue est donnée par le résultat suivant :

**Corollaire 9** (Comportement des coefficients de Fourier à l'infini)**.** *Les coefficients de Fourier d'une fonction périodique et intégrable au sens de Riemann tendent vers zéro à l'infini :*

$$\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0.$$

## 3.4 Phénomène de Gibbs

Bien que, sous les hypothèses du Théorème de Dirichlet, la série de Fourier de $f(\cdot)$ converge ponctuellement vers $\frac{1}{2}\left(f\left(x_-\right)+f\left(x_+\right)\right)$ en tout point $x$, cela ne signifie pas que le graphe de $S_N^f(\cdot)$ converge vers celui de $f(\cdot)$ lorsque $N \to \infty$ (J. Willard Gibbs, *Nature*, 1899).

Ce phénomène est connu sous le nom de *phénomène de Gibbs* et se traduit par des oscillations du graphe de la somme partielle autour des points de discontinuité.

(*Remarque* : Pour que le graphe de $S_N^f(\cdot)$ converge vers celui de $f(\cdot)$ lorsque $N \to \infty$, une notion plus forte de convergence est nécessaire : la notion de *convergence uniforme*. Cette dernière n'est pas satisfaite (sur tout le domaine de définition) par les séries de Fourier de fonctions possédant des discontinuités.)

Afin de caractériser mathématiquement le phénomène de Gibbs, nous énonçons sans démonstration le résultat suivant (pour une démonstration, voir [3]) : Si $f(\cdot)$ est une fonction satisfaisant les hypothèses du Théorème de Dirichlet et si $x_0$ est un point de discontinuité (pour lequel les limites à gauche $f\left(x_{0-}\right)$ et à droite $f\left(x_{0+}\right)$ de $f(\cdot)$ existent vu les hypothèses du Théorème de Dirichlet), alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} S_N^f\left(x_0+\frac{T}{2N}\right) &= f\left(x_{0+}\right)+a\cdot(0.089490\ldots),\\
\lim_{N\to\infty} S_N^f\left(x_0-\frac{T}{2N}\right) &= f\left(x_{0-}\right)-a\cdot(0.089490\ldots),\\
\lim_{N\to\infty} S_N^f\left(x_0\right) &= \frac{1}{2}\left(f\left(x_{0+}\right)+f\left(x_{0-}\right)\right),
\end{aligned}$$

où $T$ est la période de la fonction $f(\cdot)$ et $a = f\left(x_{0+}\right)-f\left(x_{0-}\right) \neq 0$.

Donc, de façon générale, un overshoot d'approximativement $a\cdot(0.089490)$ et un undershoot de la même valeur apparaissent de part et d'autre du point de discontinuité $x_0$ sur le graphe de la série de Fourier. Au point de discontinuité $x_0$, la série de Fourier converge vers la valeur moyenne $\frac{1}{2}\left(f\left(x_{0+}\right)+f\left(x_{0-}\right)\right)$ (quelque soit la valeur $f\left(x_0\right)$).

## 3.5 Amélioration de la convergence et réduction du phénomène de Gibbs

Plusieurs méthodes existent permettant d'améliorer la convergence de la série de Fourier et de réduire le phénomène de Gibbs. Parmi celles-ci, une en particulier mérite d'être mentionnée, celle des *sommes de Fejér* d'indice $N$ (aussi appelées *moyennes de Cesàro*) : $\sigma_N^f(x) \triangleq \frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N} S_N^f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{N+1-|n|}{N+1} c_n e^{inx}$ pour lesquelles on a le théorème suivant :

**Théorème 10** (Fejér, 1900)**.** *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est $2\pi$-périodique et* continue par morceaux *sur $\mathbb{R}$ alors*

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N^f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(x_-\right) + f\left(x_+\right)\right), \quad f\left(x_\pm\right) = \lim_{h\to 0,\, h>0} f(x \pm h)$$

*pour tout $x$. En particulier, si $f(\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors $\sigma_N^f(\cdot)$* converge uniformément *vers $f(\cdot)$ sur $\mathbb{R}$.*

*Démonstration.* Voir [2, Chap. 2] ou [3, Théorème III.5.1]. □

Le Théorème de Fejér a deux conséquences importantes :

1. Il donne un moyen de reconstruire une fonction continue par morceaux à partir de ses coefficients de Fourier lorsque la série de Fourier ne converge pas. En effet, le Théorème de Dirichlet requiert une fonction $2\pi$-périodique et "*lisse par morceaux*" tandis que le Théorème de Fejér ne requiert qu'une fonction $2\pi$-périodique et "*continue par morceaux*".
2. Lorsque la série de Fourier converge, la somme de Fejér d'indice $N$ conduit typiquement à une meilleure approximation de la fonction $f(\cdot)$ que la celle donnée par la somme partielle d'indice $N$. En particulier, les sommes de Fejér convergent uniformément vers $f(\cdot)$ lorsque $f(\cdot)$ est continue, alors que les sommes partielles convergent uniformément sous des hypothèses plus strictes (voir Théorème 20).

Tout comme pour la démonstration du Théorème de Dirichlet, celle du Théorème de Fejér se base sur le fait que $\sigma_N^f(x)$ peut s'écrire sous la forme du produit de convolution de $f(\cdot)$ avec un noyau particulier, $K_N(\cdot)$, appelé le *noyau de Fejér* d'indice $N$, i.e.,

$$\sigma_N^f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-\phi)K_N(\phi)\, d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)K_N(x-\phi)\, d\phi$$

avec (voir [2, chap. 2]) :

$$K_N(\phi) \triangleq \sum_{n=-N}^{N} \frac{N+1-|n|}{N+1} e^{in\phi} = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_N(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{(N+1)}{2}\phi\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}\right)^2, & \phi \neq 0 \\ N+1, & \phi = 0 \end{cases}.$$

La différence principale entre les noyaux de Dirichlet et de Fejér est illustrée par les deux résulats suivants, que nous énonçons sans démonstration (voir [2, chap. 2 et 18] pour leurs démonstrations).

**Théorème 11** (Propriétés du noyau de Fejér)**.**
- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(\phi)\, d\phi = 1$
- $K_N(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *uniformément en dehors de l'intervalle $[-\delta, \delta]$, $\forall\delta > 0$.*
- $K_N(x) \geq 0$, $\forall x$

**Théorème 12** (Propriétés du noyau de Dirichlet)**.**
- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\phi)\, d\phi = 1$
- *Si $x \neq \pi$, alors $D_N(x)$ ne converge pas lorsque $N \to \infty$ ($\lim_{N\to\infty} D_N(x) \nexists$, si $x \neq \pi$)*
- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\phi)|\, d\phi \geq \frac{4}{\pi^2}\log 2(N+1)$

Ces résultats se traduisent donc par le fait que, contrairement au noyau de Dirichlet, le noyau de Fejér est non-négatif pour tout $x$ et qu'il converge uniformément lorsque $N \to \infty$. C'est cette différence qui est à l'origine de l'amélioration des propriétés de convergence lorsque l'on utilise les sommes de Fejér $\sigma_N^f$ au lieu des sommes partielles $S_N^f$.

(*Remarque :* La construction du contre-exemple de Du Bois-Reymond se base sur la propriété de divergence du noyau de Dirichlet afin de construire une fonction $2\pi$-périodique et continue pour laquelle la série de Fourier ne converge pas en tout point.)

### 3.6 Solutions des exercices 1, 2 et 3

1. $S_N^f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\phi)D_N(\phi)\,d\phi$ avec $D_N(\phi) = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\phi}$

   *Démonstration.* Par définition, $S_N^f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ et $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{-in\psi}\,d\psi$. On obtient donc,

$$\begin{aligned} S_N^f(x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{-in\psi}\,d\psi \cdot e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{in(x-\psi)}\,d\psi \end{aligned}$$

   En posant $\tilde{n} = -n$, et en renomant $\tilde{n}$, $n$, on a :

$$S_N^f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{in(\psi-x)}\,d\psi$$

   En posant $\phi = \psi - x$ et en utilisant le fait que la fonction $f(\cdot)$ est $2\pi$-périodique, on obtient :

$$\begin{aligned} S_N^f(x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\phi)e^{in\phi}\,d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\phi)\underbrace{\sum_{n=-N}^{N} e^{in\phi}}_{=D_N(\phi)}\,d\phi \end{aligned}$$

   CQFD $\square$

2. $D_N(\phi) = \frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}}{e^{i\phi}-1} = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\phi\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}$, $\phi \neq 0$ ; $D_N(0) = 2N+1$

   *Démonstration.* Par définition, de $D_N(\phi)$ on a :

$$\begin{aligned} D_N(\phi) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{in\phi} \\ &= e^{-iN\phi}\left(1 + e^{i\phi} + \cdots + e^{i2N\phi}\right) = e^{-iN\phi}\sum_{n=0}^{2N} e^{in\phi} = e^{-iN\phi}\sum_{n=0}^{2N}\left(e^{i\phi}\right)^n \end{aligned}$$

   Vu que $\forall r \neq 1 : \sum_{n=0}^{L} r^n = \frac{r^{L+1}-1}{r-1}$, on obtient $\forall \phi \neq 0$ :

$$\begin{aligned} D_N(\phi) &= e^{-iN\phi}\frac{e^{i(2N+1)\phi}-1}{e^{i\phi}-1} \\ &= \frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}}{e^{i\phi}-1} \\ &= \frac{e^{-i\frac{\phi}{2}}}{e^{-i\frac{\phi}{2}}}\cdot\frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}}{e^{i\phi}-1} \\ &= \frac{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)\phi} - e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)\phi}}{e^{i\frac{\phi}{2}} - e^{-i\frac{\phi}{2}}} \\ &= \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\phi\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \end{aligned}$$

   Pour $\phi = 0$, on obtient directement $D_N(0) = \sum_{n=-N}^{N} e^0 = 2N+1$.
   CQFD $\square$

3. $\forall N: \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_N(\phi)\,d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_N(\phi)\,d\phi = \frac{1}{2}$

   *Démonstration.* Par définition de $D_N(\phi)$, on a :

$$\begin{aligned} D_N(\phi) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{in\phi} \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\left(e^{in\phi} + e^{-in\phi}\right)}{2} \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos(n\phi) \end{aligned}$$

   Il en résulte :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_N(\phi)\,d\phi &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\cos(n\phi)\right) d\phi \\ &= \left[\frac{\phi}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(n\phi)}{n}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Une preuve similaire permet de démontrer que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_N(\phi)\,d\phi = \frac{1}{2}$.
   CQFD □

# 4 Convergence absolue et uniforme

## 4.1 Définitions

**Définition 13** (Convergence ponctuelle)**.** Une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *conv. ponct.* sur un ensemble $S$ *si et seulement si* $\forall x \in S : \lim_{N\to\infty}\left(f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right) = 0$.

**Définition 14** (Convergence absolue)**.** Une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *conv. abs.* sur un ensemble $S$ *si et seulement si* $\forall x \in S : \lim_{N\to\infty}\left(f(x) - \sum_{n=0}^{N} |f_n(x)|\right) = 0$.

**Définition 15** (Convergence uniforme)**.** Une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *conv. unif.* sur un ensemble $S$ *si et seulement si* $\lim_{N\to\infty}\left(\sup_{x\in S}\left|f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right|\right) = 0$.

**Définition 16** (Convergence absolue et uniforme)**.** Une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *conv. abs. unif.* sur un ensemble $S$ *si et seulement si* la série $\sum_{n=0}^{N} |f_n(x)|$ converge unif. sur $S$, i.e., *si et seulement si* $\lim_{N\to\infty}\left(\sup_{x\in S}\left|f(x) - \sum_{n=0}^{N} |f_n(x)|\right|\right) = 0$.

## 4.2 Conv. abs. et unif. : test en $M$ de Weierstrass

**Théorème 17** (Test en $M$ de Weierstrass, sans démonstration)**.** *La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est absolument et uniformément convergente sur un ensemble $S$ si il existe une suite $M_n > 0$, $\forall n$ telle que*

*1.*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in S$$

*2.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$$

Dans le cas de la série de Fourier, on a :

$$\left|c_n e^{inx}\right| \leq |c_n|$$

L'application du test en $M$ de Weierstrass révèle donc que la série $\lim_{N\to\infty} S_N^f(x)$ est absolument et uniformément convergente *si* la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ est convergente, i.e. si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$ .

### 4.3 Conv. abs. et unif. de la série de Fourier

Afin d'établir un résultat de convergence abs. et unif. de la série de Fourier, nous avons besoin de deux résultats préliminaires :

**Théorème 18** (Inégalité de Bessel, Exercice 4)**.** *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est $2\pi$-périodique et intégrable (au sens de Riemann) sur $[-\pi, \pi]$ alors les coefficients de Fourier $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) e^{-in\psi} \, d\psi$ respectent l'inégalité*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\phi)|^2 \, d\phi$$

**Théorème 19** (Coefficients de Fourier de la dérivée, Exercice 5)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $2\pi$-périodique,* continue *et lisse par morceaux, dont les coefficients de Fourier sont $c_n$. Les coefficients de Fourier $c_n'$ de la dérivée $f'(\cdot)$ de $f(\cdot)$ sont donnés par $c_n' = inc_n$.*

**Théorème 20** (Conv. abs. et unif. de la série de Fourier)**.** *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est $2\pi$-périodique,* lisse par morceaux et continue *sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de $f(\cdot)$, $\lim_{N\to\infty} S_N^f(\cdot)$, converge abs. et unif. vers $f(\cdot)$.*

*Démonstration.* Comme nous l'avons mentionné précédemment, il suffit de montrer que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ est convergente. Les coefficients de Fourier $c_n'$ de la dérivée $f'(\cdot)$ de $f(\cdot)$ sont donnés par $c_n' = inc_n$. Donc, pour $n \neq 0$, on a $c_n = \frac{1}{in} c_n'$.

L'inégalité de Bessel appliquée à la dérivée $f'(\cdot)$ donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n'|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(\phi)|^2 \, d\phi < \infty$$

vu les hypothèses sur $f(\cdot)$. □

*Démonstration.* Par application de l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* on obtient donc :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = |c_0| + \sum_{n\neq 0} \left| \frac{c_n'}{n} \right| \leq |c_0| + \left( \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n\neq 0} |c_n'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

vu que $\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

CQFD □

## Références


[1] G. B. Folland. *Fourier analysis and its applications*, Wadsworth & Brooks, 1992.

[2] T. W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988.

[3] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1968.